Journal of Research in Teaching فصلنامه علمی تدریس پژوهی

Vol 12, No 3, Autumn, 2024 صفحات: ۲۰۸-۱۷۴ سال دوازدهم– شماره سوم – پاییز ۱۴۰۳

Examining the Representations of Geometric Figures by Middle School Students: The Role of Cognitive Apprehensions in Solving Geometric Tasks Involving figure

sima rabbi [1] Nasim Asghary [2]* Ahmad Reza Haghighi [3] Mohammad Ali Fariborzi-Araghi [4]

دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۸/۰۲ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۱۱/۰۸

Received Date: 2023/10/24 **Accepted Date: 2024/12/28**

Abstract

The visualization of figures throughout task-solving has often posed significant challenges to students engaged in geometry learning. While Duval emphasizes the importance of rapidly identifying relevant features in a given figure, there is limited understanding of how students specifically comprehend geometrical figures and how this comprehension can either facilitate or hinder their task-solving abilities. Several researchers (Parzysz, 1988; Duval, 1998, 2014; Fischbein, 1993; Laborde, 1994; Mesquita, 1998) have highlighted different functions of geometric figures. According to Mesquita (1998), figurative representations of geometrical objects help individuals better understand the relationships among these objects. Although figures can mobilize "multiple relationships," they cannot distinguish between what the figures provide (i.e., their assumptions) and what they request. Duval (2014) explains that there are two fundamentally different approaches to interpreting figures: the spontaneous perception of any visual representation and the mathematically constrained recognition of properties based on given attributes. The cognitive gap between these approaches often leads to difficulties and inconsistencies in students' understanding, as noted by Duval (2011). To defining the heuristic role of geometrical figures, Duval (1988) introduced the term "cognitive apprehension," which encompasses four types: perceptual, sequential, discursive, and operative apprehension. Studies conducted by Michael-Chrysanthou (2013), Michael-Chrysanthou & Gagatsis (2013, 2015), and Karpuz & Atasoy (2019) in line with Duval (1999) demonstrated that although geometrical figures are expected to aid in solving geometry problems, many students do not leverage this potential benefit

[1] .Department of Mathematics & Computer Science, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

[2] .Department of Mathematics & Computer Science, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

*Corresponding Author: Email: nasim.asghary@gmail.com

[3] .Department of Mathematics, Faculty of Statistics, Mathematics, and Computer, Allameh Tabataba`i University, Tehran, Iran.

[4] .Department of Mathematics & Computer Science, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

effectively. Instead, they experience inhibited operative apprehension and a lack of interplay between perceptual and discursive apprehension during geometrical tasks. This study aims to investigate the cognitive apprehensions of middle school students when solving geometrical tasks. The research involved a sample of 305 ninth, tenth, and eleventh-grade students from five schools in Roudehen, Iran. The test included four tasks from previous studies (Michael-Chrysanthou, 2013) designed to examine students' geometrical figure apprehensions based on Duval's (1999) cognitive interactions involved in geometrical activity. The students' responses were analyzed both qualitatively and quantitatively, with coding and classification of responses based on prior research (Creswell, 2014).

Findings

Task 1, Perceptual Apprehension: This task involved figures resembling squares. Despite this visual resemblance, students could not definitively classify these figures as squares due to the absence of supporting information in the task prompt. The results revealed that ninth graders displayed a higher recognition rate of seven squares (61.96%) in the figure, whereas only around half of tenth graders (51.11%) identified the same number of squares. Some tenth and eleventh graders (13.33% and 10.31%, respectively) used a measurement-based approach to conclude that there were no squares in the figure, emphasizing the insufficiency of the information provided. This approach was more prevalent among tenth and eleventh graders, suggesting potential differences in geometry education. Further exploration of students' responses to Task 1 revealed diverse reasoning patterns. Some ninth graders employed a painting method to count squares accurately, while others perceived a large four-sided shape as a square and identified additional squares by drawing symmetrical lines.

Task 2, Operative Apprehension: Figures were placed on a checkered surface with mathematical attributes. The results indicated that 43.65% of ninth graders used operative apprehension to answer the task. Surprisingly, 22.50% of tenth graders did not consider operative apprehension sufficient, favoring the use of the concept of area to determine the answer. Some students, inspired by the descriptive role of the figure, chose to rely on area calculations, demonstrating diverse problem-solving strategies. In Task 2, students' answers were shaped by various cognitive processes. They employed natural discursive reasoning, estimation, conjecture, and the concept of area to provide solutions. A significant portion used operative apprehension to express their desire for additional information.

Task 3, Discursive Apprehension: Students were tasked with comparing the lengths of MH and NH. The majority of ninth graders (99.19%) relied on natural discursive reasoning to answer, with a smaller percentage (8.87%) transitioning from perceptual apprehension towards discursive apprehension. Surprisingly, a shift from perceptual apprehension to discursive apprehension was not evident among tenth and eleventh graders. A fraction of tenth graders (11.11%) applied perceptual apprehension due to differences in geometry education methods. Notably, several students followed various paths of theoretical discursive apprehension when approaching Task 3. They employed congruence of triangles, accepted equality of lines or angles without proper reasoning, or resorted to visual perception in cases where the figure did not align with the problem's description. The students' cognitive processes often prioritized the

visual aspect over revisiting the verbal description, leading to mathematically incorrect responses.

Task 4, Sequential Apprehension: Students were asked to draw a parallelogram based on a given triangle with equal areas. Results showed that 72.41% of ninth graders employed natural discursive reasoning to solve the task, demonstrating their reliance on heuristically interpreting geometric figures. Tenth and eleventh graders displayed lower usage of this method, with many opting for theoretical discursive apprehension. The study identified two primary paths of theoretical discursive reasoning among students, each leading to the creation of a parallelogram with an equal area to the triangle. Students used various strategies to accomplish this, such as halving the base of the triangle and employing congruence, ultimately arriving at the correct answer. Some students chose alternative paths of theoretical discursive reasoning, demonstrating a nuanced understanding of geometric concepts.

Discussion and Conclusion: The study enhances existing literature by identifying new reasoning patterns derived from additional coding, highlighting how students understand and solve geometrical tasks. The findings align with previous research, particularly that of Michael-Chrysanthou & Gagatsis (2013) and Mesquita (1998), which indicated diverse reasoning strategies among students. The research confirms the significant role of cognitive apprehension in geometry learning and underscores the need for instructional strategies that address the cognitive gaps identified by Duval. Educators often find it hard to resist intervening in student work. However, it's vital to help students progress from basic to discursive understanding of geometric figures for problem-solving. (Cannizzaro & Menghini, 2006). Gagatsis et al. (2023) found that just solving problems correctly doesn't equip teachers to foresee students' difficulties. Incorporating tailored geometry tasks into the curriculum is a deliberate approach that considers the various apprehensions and challenges students encounter with different geometric concepts throughout their secondary school years (Michael–Chrysanthou, et al. 2024). These highlight Duval's (1999) emphasis on the need to integrate mathematical and cognitive elements in task assignments. Duval (2014) also advocates for more research on helping students understand figures mathematically, beyond just visual understanding, to solve problems independently. Specialized geometry courses can enhance teachers' understanding of different mental representations of geometric figures, thereby improving students' reasoning abilities. However, the study had limitations such as potential fatigue from long tests and the use of convenience sampling, which requires careful interpretation of results.

Keywords: Discursive apprehension, Operative apprehension, Perceptual apprehension, Sequential apprehension

بررسی بازنمایی های شکل های هندسی دانش آموزان متوسطه: نقش درک های شناختی درحل تکالیف هندسی شامل شکل

سیما ربی [۱] نسیم اصغری [*۱] احمدرضا حقیقی [۲] محمد علی فریبرزی عراقی [۳]

چکیده

هدف:. هدف این مطالعه آن است که چگونه با استفاده از شکل ها در تکلیف هندسی می توان درک های شناختی بکار گرفته شده توسط دانش آموزان را در مواجهه با شکل هندسی حین انجام تکلیف شناسایی نمود. تجسم شکل های هندسی یکی از چالش هایی است که دانش آموزان حین انجام تکلیف در فرایند یادگیری هندسه با آن روبه رو می شوند.

روش: برای این منظور یک تحقیق موردی با رویکرد کیفی روی نمونه ۳۰۵ نفری از دانش آموزان دوره متوسطه طراحی شد. دانش‌آموزان پایه نهم، دهم و یازدهم شهرستان رودهن استان تهران بودند. لازم به ذکر است با توجه به محدودیت زمان و مکان و نیز پایبندی به حضور محقق در حین اجرای آزمون، از روش نمونه‌گیری در دسترس استفاده گردید.

یافته‌ها: تجزیه و تحلیل کیفی پاسخ ها نشان داد بیشتر دانش آموزان در هرسه پایه برای استدلال درباره روابط هندسی و استنتاج از آنها از درک دریافتی استفاده می کردند حتی زمانیکه اطلاعات مورد نیاز برای آن استدلال ها در صورت مساله بیان نشده بود. علاوه بر آن مشاهده گردید دانش آموزان در پایه نهم با شکل بندی هایی نو و متفاوت از شکل داده شده، از استدلال شکلی به عنوان یک تکنیک اثبات بهره بردند در حالی که دانش آموزان در پایه های بالاتر بیشتر به روش های قراردادی اعتماد داشتند.

کلیدواژه ها: درک دریافتی، درک عملیاتی، درک استدلالی، درک ساختاری

[۱] سیما ربی، دانشجوی دکتری آموزش ریاضی گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

[*۱] دکتر نسیم اصغری، دانشیار گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

نویسنده مسئول: Email: nasim.asghary@gmail.com

[۲] دکتر احمدرضا حقیقی، استاد گروه ریاضی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران.

[۳] دکتر محمد علی فریبرزی عراقی، استاد گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

مقدمه

از آنجایی که تدریس هندسه در مقایسه با محاسبات عددی و جبر مقدماتی پیچیده تر و چالش برانگیزتر است چرا باید هندسه را به تمام دانش آموزان آموزش داد؟ Duval (1998)، پس از طرح این سوال این گونه به آن پاسخ می دهد: هندسه نسبت به دیگر حوزه ها در ریاضیات در رشد مدل های مختلف فکری مؤثرتر است. علاوه برآن هندسه با یکپارچه سازی فرایندهای شناختی به تقویت مهارت های استدلالی و بازنمایی های دیداری[۱] افراد کمک می نماید (Duval,1998). گرچه تصویرسازی های[۲] دیداری از اشیاء هندسی می تواند شهود هندسی را در موقعیت های خاص تقویت نماید، با این حال مشکلات گسترده‌ای در میان دانش‌آموزان در درک مفاهیم هندسی و حل مسئله در سطوح مختلف آموزشی وجود دارد. (Jones, 2000; Zangeneh, 2005; De Villiers,2010; Duval, 2017; Fujita & Jones, 2007; Antunović-Piton & Baranović, 2023).

بازنمایی اشیاء هندسی نیز، همچنان یکی از چالش ها در تدریس و یادگیری هندسه است(Mesquita,1998). منشاء پیدایش این چالش به عقیده ی(2011) Duval، تفاوت هایی است بین آنچه در شکل دیده می شود و آنچه در صورت مساله بیان شده است. دو سطح از عملکرد های شناختی[۳] وجود دارند که تفکیک نشده اند: مسیر درک طبیعی[۴] و مسیر درک ریاضیاتی[۵]. درک طبیعی به هر بازنمایی دیداری از اشیاء، ساختارهای خاص، تصویرها یا نمودارها اشاره می نماید و درک ریاضیاتی به استدلال کردن، تعریف، حل یا اثبات یک مساله مربوط است(Duval, 2014). او درادامه یادآور می شود مشکلات بیشتر دانش آموزان درمواجهه با شکل هندسی حین انجام تکلیف، بخاطر وجود فاصله شناختی[۶] بین این دو مسیر نگاه کردن به شکل هندسی است. مطالعات زیادی مانند (Michael-Chrysanthou & Gagatsis, 2014, 2015; Gridos et al. (2021)) نشان می دهد شکل هندسی در مسیر حل مساله نقش حمایت گری برای بسیاری از دانش آموزان ندارد. آنان اغلب در درک تعاریف و خواص دقیق ریاضی دچار مشکل می‌شوند (Gogou et al., 2020). با وجود روش‌های مختلف آموزشی، دانش آموزان اغلب روش‌های الگوریتمی را بر روش‌های بصری برای مفاهیم پایه ریاضی ترجیح می‌دهند (Dreyfus and Eisenberg, 1990; Gridos et al., 2021). علاوه بر این، بسیاری از آنان در کشف دوباره حقایق هندسی از داده های دریافتی در صورت مساله با بکارگیری درک استدلالی موفق نیستند. (Michael–Chrysanthou, 2013; Karpuz & Atasoy, 2019; Karpuz & Güven, 2022).

Jones (1998) بر اهمیت نظریه دووال در شناسایی پیچیدگی های شناختی ذاتی در فعالیت‌های هندسی تأکید می کند. با توجه به باور Duval (2014) مبنی براینکه تقویت مهارت شناسایی سریع ویژگی های مرتبط در یک شکل بر توانایی درک هندسی دانش آموزان موثر است، بررسی های دقیقی لازم است تا درک های بکارگرفته شده توسط دانش آموزان در مواجهه با شکل هندسی با جزییات بررسی شود و اینکه

---

1. Visual representation.
2. Depictions.
3. Cognitive functioning.
4. Natural apprehension.
5. Mathematical apprehension.
6. Cognitive gap.

این درک ها توانایی انجام تکلیف هندسه را تسهیل نموده و یا مانعی در برابر آن بوجود آورده است. این مطالعه، با الهام از باور دووال، قصد دارد تا درک های شناختی بکار گرفته شده توسط دانش‌آموزان را هنگام استفاده از اشکال هندسی در تکالیف هندسی بررسی کند. حال می توان سوال تحقیق را اینگونه طرح نمود: چگونه با استفاده از شکل ها در تکلیف هندسی می توان درک های شناختی بکار گرفته شده توسط دانش آموزان را در مواجهه با شکل هندسی حین انجام تکلیف شناسایی نمود؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، دست نوشته های دانش آموزان به چهار تکلیف آزمون هندسه از دو دیدگاه بررسی گردید: وجه قابل رویت، در رابطه با تعامل با اشیاء ریاضی و فرایندهای معتبر بکارگرفته شده در مسیرحل؛ وجه غیرقابل رویت، دررابطه با فرایند های های شناختی[1] که به افراد کمک می نماید تا مفاهیم ریاضی را درک نموده و بکار برند (Duval,1999).

چارچوب ادبیات تحقیق

شکل هندسی[2]

معلمان و دانش آموزان تصویر شهودی از بازنمایی یک موقعیت دارند و بیشتر اوقات هنگام تدریس یا انجام تکلیف ریاضی آن را بکار می برند (Selling, 2015). یک تصویر در ذهن ما، برروی کاغذ یا صفحه نمایش از آنچه که مشاهده می شود می تواند بسیار متفاوت باشد. هرگاه به نقاشی یک خانه بهمراه سقف آن، که با استفاده از یک مثلث و مربع ترسیم شده است نگاه کنیم در مقایسه با مربع و مثلث بعنوان اشیاء هندسی، این تفاوت ها رو بیشتر میبینیم (Michael-Chrysanthou, 2013). یک شکل از طریق نقاط و نشانه های ادراکی تحت قوانین گشتالت پدیدار می شود (Duval,1995). به عقیده Mesquita (1998)، یک شکل هندسی یک بازنمایی خارجی[3] از یک مفهوم یا یک موقعیت در هندسه است. یک ترسیم یا شیء فیزیکی از نگاه Duval (1995)، محدودیت های ذاتی مرتبط با فرایند سازمان دهی آن رسم بخصوص، که در اشیاء هندسی دیده می شود، را ندارد و این باور وجود دارد که شکل هندسی برای کمک به حل مساله و ارایه نشانه هایی برای اثبات استفاده می شود. بنابراین Duval (1998)، اصرار دارد مسیری که شکل هندسی درک می شود هم از لحاظ ذهنی و هم به عنوان یک بازنمایی روی کاغذ، متفاوت از درک اشیاء فیزیکی است. تحقیقات بسیاری (Parzyzs, 1988; Duval 1998, 2014; Fischbein 1993; Laborde,1994; Mesquita 1998)، به عملکردهای مختلف شکل هندسی پرداخته اند. یک بازنمایی تصویری[4] از اشیاء هندسی به افراد برای درک بهتر روابط بین اجزاء درون شیء هندسی کمک می نماید. با این حال Mesquita (1998)، خاطر نشان می کند گرچه شکل ها می توانند روابط چندگانه بین اجزاء را به نمایش بگذارند، بین آنچه که به تصویر می کشند و آنچه که صورت مساله خواسته است نمی توانند تفاوتی قایل شوند. در ادامه Duval (2014)، یادآور می شود با اینکه در ترسیم شکل ها می توان از ابزار

---

1 .Cognitive operations

2 .Geometrical figure

3. External representation

4 .Figurative representation

بخصوصی کمک گرفت اما خواص شکل فقط می تواند از طریق صورت مساله و یا کدگشایی بدست آید. با توجه به عامل های ذکرشده دربالا که نشان دهنده تناقض هایی برای عملکرد شکل های هندسی جهت تسهیل در حل مساله می باشد، برنامه های مدرسه ای برای استفاده از شکل های هندسی در کتب درسی چندین بار تغییر نموده است (Mesquita, 1998). با توجه به پیچیدگی شناختی اشکال هندسی Fischbein (1993)، تلاش کرد با بررسی دو وجه مفهومی و تصویری، آنان را تجزیه وتحلیل نماید. او اشکال هندسی را به‌عنوان موجودیت‌های ذهنی تعبیر نمود که هم‌زمان دارای خواص شکلی و خواص مفهومی هستند، به عقیده وی با اینکه، یک‌شکل هندسی می‌تواند به‌گونه‌ای در نظر گرفته شود که شامل خواص مفهومی باشد، اما فقط یک مفهوم نیست بلکه یک تصویر نیز است. بنابراین او اصطلاح مفهوم-شکل[۱] را معرفی کرد که به شکل‌هایی اطلاق می‌شود که هم‌زمان هم مفهوم و هم بازنمایی فضایی هستند. Mariotti (1995)، نیز در این زمینه یادآوری می‌کند که هندسه حوزه‌ای است که در آن لزوم تعامل بین تصاویر و مفاهیم مشهود است. در حقیقت افرادی که با هندسه آشنا هستند، از این (مفهوم-شکل) بسیار سود می‌برند ولی این حالت در فراگیران مبتدی وجود ندارد.

نقش وطبیعت شکل هندسی[۲]

مشاهده پذیری[۳] و شرایط بازشناخت[۴] بازنمایی های خارجی مبتنی بر نوع بازنمایی بکارگرفته شده است (Mesquita, 1998). بنابراین نقش و طبیعت بازنمایی خارجی بعنوان دو معیار مقدماتی برای تجزیه و تحلیل استفاده می شوند.

نقش		طبیعت	
رهیافتی [۵]	توصیفی [۶]	تصویر [۷]	شیء [۸]

[1]. Figural concept

[2] .Role and Nature of Geometrical figure

[3] .Visibility

[4]. Recognition

در برخی دیگر از مسائل، بازنمایی خارجی، خود به‌عنوان حمایتگر شهود عمل کرده و راه‌کارهایی را پیشنهاد می‌دهد که به سمت حل مسئله هدایت می‌شوند که در این حالت بازنمایی خارجی یک نقش رهیافتی دارد.	در برخی از مسائل بازنمایی خارجی روابط و خاصیت‌های چندگانه‌ای را در مسئله نشان می‌دهد بدون اینکه به فرایند حل مسئله اشاره‌ای داشته باشد که در این حالت بازنمایی خارجی **نقش** توصیفی دارد، در حقیقت می‌توان با توجه به بازنمایی خارجی ارائه‌شده، درک مختصری از اطلاعات موجود در بیان مسئله به دست آورد.	همیشه نمی‌توان روابط هندسی را به‌طور مستقیم از ساختمان شکل داده‌شده، نتیجه گرفت که در این حالت گفته می‌شود بازنمایی خارجی طبیعت عکس و یا تصویر دارد.	هرگاه بتوان روابط هندسی بیان‌شده در صورت‌مسئله را از ساختمان شکل هندسی نیز استنتاج کرد، بازنمایی خارجی طبیعت شیء دارد

جدول۱. نقش و طبیعت بازنمایی خارجی در هندسه

خبره ها با استفاده از طبیعت تصویر و یا شیء شکل های هندسی ویژگی های مورد نظر را کدگذاری می نمایند و در فضای هندسی آن را بکار میبرند در حالی که دانش آموزان برخواص مبتنی بر ظاهر شکل ها بیشتر تکیه می کنند (Mesquita, 1998).

تعامل[1] بین یک فرد و یک شکل هندسی

نگاه کردن به یک شکل هندسی در فرایند تدریس و یادگیری هندسه مهم و چالش برانگیز است. Duval (2014)، دو رویکرد کاملا متفاوت را در نگاه کردن به شکل هندسی بدین گونه شرح می دهد: در مسیر اول فرد به محض نگاه کردن به شکل هندسی یک بازنمایی دیداری از یک شیء مادی یا فضایی (مانند یک تصویر، نمودار، نقشه،...) دریافت می کند. در مسیر دوم محدودیت های ریاضیاتی این شناخت را به مجموعه خواص داده شده محدود می نماید بگونه ای که برای موفقیت درحل مساله، بقیه ویژگی های مورد نیاز باید استنتاج شوند. Duval (2011)، توضیح می دهد که مشکلات اساسی دانش آموزان در هندسه ناشی از فاصله شناختی بوجود آمده بین این دو مسیر نگاه کردن به شکل هندسی است. این فاصله یک ناهماهنگی بین آنچه از شکل دیده می شود و آنچه در صورت مساله بیان شده، بوجود می آورد. بنابراین برای معرفی نقش رهیافتی یک شکل هندسی Duval (1988)، اصطلاح درک شناختی[2] را معرفی می کند که به مسیرهای متفاوت نگاه کردن به یک شکل دلالت دارد. او چهار نوع درک را بدین گونه معرفی می نماید: درک دریافتی، درک ساختاری، درک استدلالی و درک عملیاتی.

جدول ۲. چهارنوع درک در مسیر نگاه کردن به شکل هندسی

درک عملیاتی	درک استدلالی	درک ساختاری	درک دریافتی
Operative apprehension	Discursive apprehension	Sequential apprehension	Perceptual apprehension

[2] .Cognitive apprehension

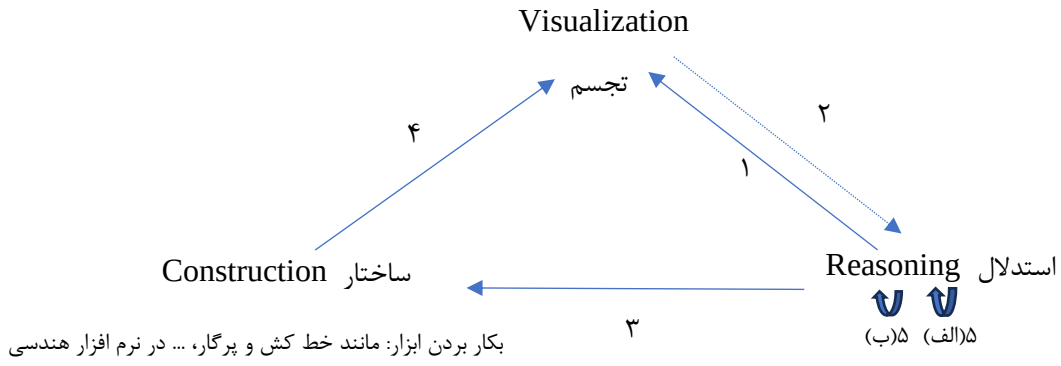
درک عملیاتی به توانایی تفکر جهت ترسیم شکل‌هایی در ارتباط با شکل داده‌شده به‌منظور اصلاح یا دوباره دیدن است.	درک استدلالی، به خواص ریاضی اطلاق می‌شود که صرفاً با درک دریافتی از شکل هندسی قابل‌استخراج نیست و مستلزم استدلال و یا کشف خواص شکل داده شده است.	درک ساختاری به ساختمان و یا توصیف ساختار یک‌شکل هندسی اشاره می‌کند	درک دریافتی(اجمالی) چیزی است که فرد در مشاهده سریع یک شکل هندسی تشخیص می‌دهد.

فرایندهای شناختی مهم در فعالیت هندسه

به باور Duval (1998)، در نظرگرفتن پیچیدگی های شناختی ذاتی در فعالیت هندسه بسیار مهم است. او سه فرایند شناختی مهم را که نقش اساسی در عملکرد معرفت شناختی[1] هندسه، بازی می کنند بدین شکل برمی شمرد: تجسم[2]، استدلال[3] و ساختار[4].

[1]. Epistemological
[2] .Visualization
[3] .Reasoning
[4] .Construction

تشخیص گشتالت ها و شکل بندی ها در حالت دو یا سه بعدی.
این شناسایی به روش ساخت و گفتمان وابسته نیست.



شکل ۱. تعامل های شناختی مهم در فعالیت هندسه (Duval 1998)

نیاز به تمایز بین فرآیندهای مختلف تجسم و استدلال را Duval (1998)، به دلیل وجود روش‌های متعدد در درک یک شکل هندسی و انواع مختلف استدلال برجسته کرده است. همچنین ضمن در نظرگرفتن پیچیدگی های شناختی بین مسیرهای ریاضیاتی و اجمالی نگاه کردن به شکل هندسی Duval (2014)، تاکید می کند تجسم به عنوان یک فرایند شناختی مستقل از ابعاد و اندازه های شکل همچنین فارغ از خواص آن دیده شود. درفرایند تجسم نمودن یک شکل هندسی متذکر می شود حداقل یکی از سه تغییرات زیر در مورد آنچه که دیده شده است، لحاظ می شود: تغییر ابعاد[1]، لنگرگاه[2] و شکلی[3]. تغییر در ابعاد درونی و لنگرگاهی از خصوصیات مسیر ریاضیاتی نگاه کردن به شکل هندسی برشمرده می شود. یک شکل هندسی شامل اجزای قابل رویت بهمراه بسیار زیرشکل های ممکن است که این مجموعه از مواردی که بواسطه ساختمان شکل و یا مفروضات مرتبط وجود دارند، بسیار بیشتر است (Duval,1998). توانایی[4] یک شکل هندسی ارتباط تنگاتنگی با ظرفیت های دوباره شکل بندی آن دارد در جایی که شکل بندی هایی متفاوت با ایده هایی کلیدی برای حل مساله ارایه دهد. البته لازم به ذکر است مشاهده پذیری و شروط دوباره شناخت آن ها، مبتنی بر بازنمایی های خارجی و شکل بندی های مربوطه است (Duval,

[1]. Dimensional change
[2] .Anchorage change
[3]. Figural change
[4]. Power

(1998; Mesquita, 1998. در این جا سه عملکرد وجود دارد بسته به اینکه چگونه یک شکل داده شده در مسیر حل مساله اصلاح[1] شود که توسط Duval (1999)، تعریف شده است:

جدول ۳. انواع اصلاحات شکلی از شکل های هندسی

روش مکانی The place way	روش چشمی The optical way	روش جزء شناسانه The mereological way
در این روش جهت شکل تغییر می کند که برروی زاویه قآیمه موجود در شکل اثرگذار است. این زاویه از برخورد خطوط افقی و عمودی موجود در شکل قابل درک و شناسایی است.	در این روش شکل ها می توانند باریکتر، پهن تر و یا کج شوند در حالی که شکل اصلی تغییری نکرده است.	در این روش شکل داده شده می تواند به شکل های متنوعی تقسیم شود مانند مستطیل،... بگونه ای که در ادامه دوباره ترکیب شده و یک شکل کاملا جدید و یا زیرشکلهایی تشکیل دهد.

با این که از طریق بکارگیری درک عملیاتی می توان بینش هایی برای حل مساله یافت اما همواره کشف عملگری مناسب که منجر به تغییرات شکلی مؤثر شود، ساده نیست و کاری چالش برانگیز است. در نتیجه زمانی که یک عملگر مناسب یافت شود مسایل هندسه تولیداتی رهیافتی می شوند (Duval, 1999). یک تغییر لنگرگاه عمومی در درک استدلالی رخ می دهد. بدین صورت که دانش آموزان هنگام مشاهده و تجزیه و تحلیل شکل های ریاضی در یک گفتگوی درونی درگیر شده و بسمت کشف خواص قبلی که بدون توجه مانده اند، هدایت می شوند. با این حال این تغییر لنگرگاه همواره به آسانی تشخیص داده نمی شود. برای این منظور Duval (1998)، سه فرایند شناختی درحل مساله و اثبات در هندسه را معرفی می نماید:

جدول ۴. فرایند های شناختی در حل مساله و اثبات در هندسه

یک فرایند استدلال تئوری A Theoretical discursive process	یک فرایند استدلال طبیعی A Natural discursive process	یک فرایند شکلی محض A Purely configure process
این فرایند از طریق استنتاج شکل می گیرد. لزوم وجود منطق در این فرایند تیوری کاملا مشهود است. یک فرایند شکلی محض نمی تواند توسط یک استدلال مبتنی بر قضایا پشتیبانی شود حتی اگر ایده ی کلیدی برای اثبات فراهم کند.	این فرایند بی درنگ در یک گفتگوی معمولی از طریق توصیف نمودن، توضیح دادن و یا مباحثه تشکیل می شود.	این فرایند برای دانش آموزان بیشترین پیچیدگی و کمترین وضوح و آگاهی را در نگاه اول بهمراه دارد. درک عملیاتی که مرتبط با تغییرات شکلی است کاملا از درک های دریافتی و استدلالی متمایز است.

[1] .Modify

بررسی فرایندهای شناختی در فعالیت های هندسه(شکل ۱) نشان می دهد که تجسم در هندسه بعنوان یک بازنمایی از فضا، شامل همزمان درک های دریافتی، استدلالی و عملیاتی می باشد و از آنجایی که تجسم مبتنی بر دانش ریاضیاتی نیست یک نقش رهیافتی اساسی دارد و قادر است از طریق درک عملیاتی شواهد قابل قبولی ارایه دهد (Duval, 1998). بررسی فرایندهای شناختی در فعالیت های هندسه(شکل ۱) نشان می دهد فرایند تجسم شکل هندسی دانش چگونگی ساختمان شکل را، پشتیبانی نمی کند(فلش۴، دو طرفه نیست) و مستقل از اینکه یک شکل چگونه ساخته شده باشد، می توان به آن دسترسی داشت و تجسم سازی نمود. اگرچه دانش چگونگی ساخت یک شکل می تواند به فرایند تجسم شکل مورد نظر کمک نماید اما مسیر ساخت یک شکل در فرایند ترسیم بیشترمبتنی بر تعامل بین خصوصیات ریاضی و محدودیت های تکنیکی است تا قوانین و نشانه های تصویری (Duval,1999). از آنجایی که الگوریتم مشخصی برای استفاده رهیافتی از شکل هندسی وجود ندارد (Duval, 2006)، شکل های هندسی بندرت تحت تاثیر گفتمان قرار می گیرند و درهمان ابتدا با نگاه کردن، درک می شوند. این موضوع می تواند توضیحی بر عملکرد دانش آموزان باشد که در مواجهه با شکل هندسی برای حل تکلیف، به شناخت اجمالی شکل ها بیشتر از صورت مساله اعتماد می کنند (Duval, 2014).

مطالعات انجام شده، Michael-Chrysanthou (2013); Michael-Chrysanthou & Gagatsis (2013, 2015); Karpuz & Atasoy, (2019); Gridos et al., (2021); Karpuz & Güven, (2022),

همراستا با Duval (1999)، نشان می دهند گرچه انتظار می رود شکل هندسی نقش حمایتگری در حل مسایل هندسی داشته باشد، بیشتر دانش آموزان از این پتانسیل بهره مند نمی شوند. علاوه برآن نتایج تحقیقات اشاره شده در بالا آشکار می نماید دانش آموزان حین انجام تکلیف هندسه بندرت از درک عملیاتی استفاده می کنند و در برقراری تعامل بین درک دریافتی و استدلالی ناتوان هستند. Mesquita (1998)، یادآور می شود که کتاب های درسی با استفاده از بازنمایی های خارجی با طبیعت شیء، مشکلاتی را برای دانش آموزان پدید می آورند خصوصا وقتی با مسایلی از هندسه درگیر باشند که شامل بازنمایی هایی متنوع هستند. دانش آموزان گرفتار در چنین موقعیتی برای غلبه بر مانع بوجود آمده جایگزینی هایی ذهنی انجام می دهند مگر اینکه با بازنمایی مورد نظر بواسطه تجربه آموزشی خود آشنا باشند. علیرغم چالش های اشاره شده، مطالعات ذکر شده در بالا، خاطر نشان می کنند مسیری که هندسه آموزش داده می شود بر چگونگی استفاده از شکل هندسی، تاثیرگذار است ومی تواند یک اثر رهیافتی بر حل مساله داشته باشد. با مطالعه چارچوب‌های نظری یادگیری استدلال هندسی Duval (1998)، Fischbein (1993)، و Van Hiele (1985)، Jones (1998) بیان می‌کند در مدل شناختی استدلال هندسی Duval (1998)، به طور خاص به چگونگی درک‌های بکار گرفته شده توسط دانش‌آموزان در نگاه نمودن به شکل هندسی پرداخته شده است، بنابراین در مطالعه حاضر برای بررسی درک‌های شناختی دانش‌آموزان متوسطه از چارچوب نظری Duval (1998) استفاده شد.

روش شناسی تحقیق

هدف از این مطالعه بررسی درک های شناختی دانش آموزان در مواجهه با شکل هندسی حین انجام تکلیف هندسه می باشد. برای این منظور یک تحقیق موردی با رویکرد کیفی روی نمونه ۳۰۵ نفری از دانش آموزان دوره متوسطه طراحی شد. دانش‌آموزان پایه نهم، دهم و یازدهم شهرستان رودهن استان تهران بودند. لازم به ذکر است با توجه به محدودیت زمان و مکان و نیز پایبندی به حضور محقق در حین اجرای آزمون، از روش نمونه‌گیری در دسترس استفاده گردید. آزمون شامل چهار تکلیف بود که در مطالعات قبلی Michael-Chrysanthou (2013) استفاده شده بود و برای بررسی درک های شناختی دانش آموزان مبتنی بر تعامل های شناختی Duval (1999)، درفعالیت هندسه طراحی و اجرا شد. توزیع فراوانی دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این آزمون به تفکیک پایه تحصیلی در جدول ۵ آورده شده است.

جدول ۵. توزیع فراوانی دانش آموزان به تفکیک پایه تحصیلی

دانش آموزان	پایه
۱۶۳	نهم
۴۵	دهم
۹۷	یازدهم
۳۰۵	جمع

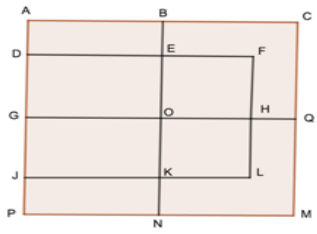
انتخاب این سه‌پایه (نهم، دهم و یازدهم) به دلیل محتوای هندسه ارائه شده در کتاب‌های درسی آنان بود. لازم به ذکر است که این آزمون در روزهای پایانی اردیبهشت‌ماه برگزارشده بود. در پایه نهم، دانش‌آموزان با مفهوم استدلال استنتاجی در اثبات‌های هندسی آشنا شده بودند. همچنین، در پایه‌های دهم و یازدهم با انجام فعالیت‌های متنوع هندسه و بکارگیری استدلال هندسی، درک عمیق‌تری نسبت به مفاهیم هندسی پیدا کرده بودند. بنابراین انتخاب این سه پایه علاوه بر امکان انتخاب محتوی یکسان برای آزمون، امکان بررسی و شناسایی رشد درک و فهم دانش‌آموزان از شکل هندسی را در طول دوره متوسطه اول به دوم فراهم می‌کرد. دراین مطالعه از چهار تکلیف براساس چارچوب استدلال شکل هندسی Duval (1999)، بعنوان ابزار استفاده شد. این تکالیف برای ارزیابی استدلال شناختی مرتبط با شکل هندسی طراحی شده بودند. از دانش‌آموزان خواسته شد که پاسخ‌های تشریحی به تکالیف داده شده را ارائه کنند. صحت ابزار با مشورت کارشناسان تضمین شده بود و نظرات آنان نیز در جمع‌آوری داده‌ها در نظر گرفته شد. برای بهبود کیفیت مطالعه، نتایج هر مرحله به دو کارشناس آموزش ریاضی فرستاده شد و نظرات آنان مورد بررسی و بازبینی قرار گرفت.

تجزیه و تحلیل داده ها

پاسخ‌های دانش‌آموزان به سوالات آزمون، به صورت کیفی و کمی تحلیل شد. برای این منظور، ابتدا پاسخ های تمام دانش آموزان به هر تکلیف بارها بر اساس ادبیات تحقیق وکدگذاری تحقیقات قبلی بررسی

شد. سپس کدها دسته‌بندی شدند و دسته‌های مربوطه استخراج شدند(Creswell, 2014). این کدگذاری به صورت رفت و برگشتی باتوجه به(1999) Duval ، (2013) Michael– Chrysanthou و Karpuz & Atasoy, (2019) آغاز شد و در نهایت با بررسی پاسخ های دانش آموزان و بهره مندی از تجربیات بیش از بیست سال تدریس هندسه، به آنچه در شکل های ۲، ۳، ۴ و ۵ نشان داده شده است تبدیل گردید. برای نمایش تکرار کدهای مربوط به تکالیف فوق، آمارهای توصیفی به ویژه شاخص‌های فراوانی استفاده شد. مؤلف اول درهنگام اجرای آزمون حضورداشته و راهنمایی‌های لازم را به دانش‌آموزان ارائه می‌داد. او ضمن یادداشت‌برداری از سؤالاتی که دانش‌آموزان در مورد چگونگی انجام تکلیف‌ها می‌پرسیدند، آن‌ها را تشویق می‌نمود که چگونگی تفکر خود را در شکل‌گیری پاسخ، روی برگه جواب به‌طور کامل بنویسند.

در تکلیف اول، قسمت الف دانش آموزان می بایست تعداد مربع‌های موجود در شکل را تشخیص دهند سپس در قسمت ب، مربع‌های موجود در شکل را نام ببرند.

تکلیف ۱ با دقت به شکل نگاه کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. الف) چند مربع می‌توانید در شکل تشخیص دهید. ب) مربع‌های موجود در شکل را نام ببرید.	

شکل ۲ کدبوکی را نشان می دهد که بر اساس آن، درک دریافتی در پاسخ‌های دانش‌آموزان به تکلیف اول کدگذاری شده است. برای نام‌گذاری کدهای مربوط به درک دریافتی بدین گونه عمل شد: ابتدا از حرف اول کلمه دریافتی[1] برای طبقه‌بندی استفاده شد سپس برای نام‌گذاری فرایند پاسخ گویی از طریق فرایند استدلال تئوری[2] و یا استدلال طبیعی[3] اندیس‌های T و N به ترتیب بعد از اولین حرف کلمه استدلالی[4] استفاده گردید. درنهایت با شماره‌گذاری بعد از اندیس، مسیرهای استدلالی بکارگرفته شده، طبقه‌بندی شدند. نام‌گذاری این کدها به‌صورت زیر است:

۱) با به‌کارگیری درک دریافتی پاسخ کامل به این تکلیف، تعداد هفت مربع است که عبارت اند از ABOG, BCQO, GONP, OQMN, EFHO, OHLK ACMP, هستند. با این حال اگر دانش آموزان به همه هفت مربع اشاره کنند، درک به‌کارگرفته شده، فراتر از درک دریافتی و نیازمند استدلال است. به عبارت دیگر این نوع پاسخ نیازمند دوباره شکل بندی شکل داده شده یا یک فرایند استدلال طبیعی، گرچه ذهنی است (PD_{N1}).

۲) تشخیص کامل نبوده، اما دست‌کم به دو مربع واضح و روشن، EFHO , OHLK اشاره‌شده است(PD_{N2}).

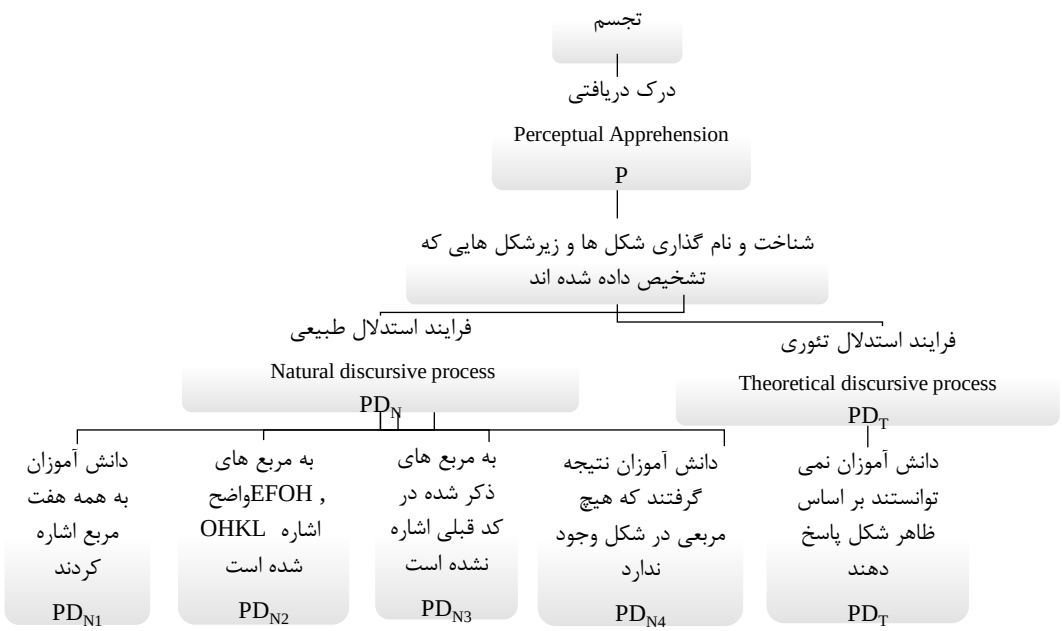
---

[1] .Perceptual
[2]. Theoretical
[3]. Natural
[4] .Discursive

۳) تشخیص کامل نبوده، و به دو مربع ذکرشده در بند۲ ، اشاره نشده است(PD_{N3}).

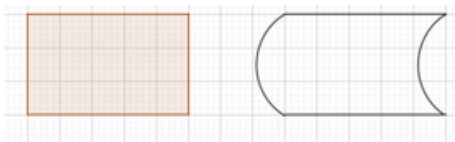
۴) دانش‌آموزان از طریق بکارگیری ابزار اندازه‌گیری و یا با تخمین زدن طول پاره‌خط، نتیجه گرفتند هیچ مربعی در شکل وجود ندارد(PD_{N4}).

۵) در این گروه دانش‌آموزان، اطلاعات سؤال را برای پاسخ‌گویی کافی ندانسته و اشاره کرده اند که نمی‌توانند به شکل استناد نمایند (PD_T).

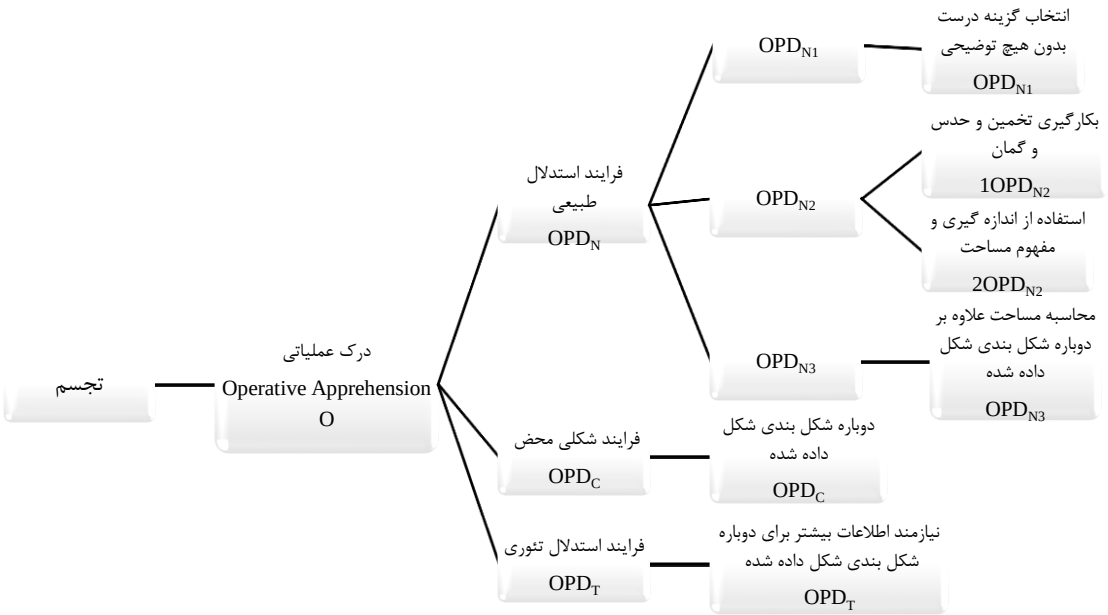


شکل ۲. کدگذاری پاسخ های دانش آموزان مربوط به درک دریافتی

در تکلیف ۲ از دانش‌آموزان خواسته‌شده بود تا به مقایسه مساحت دو شکل داده شده بپردازند. انتظار می‌رفت که دانش‌آموزان با دوباره شکل‌بندی شکل B بدین‌صورت که قسمتی از جلوی شکل B بریده و در قسمت عقب شکل B قرار داده شود، یک مستطیل مشابه شکل A بسازند. سپس نتیجه بگیرند که هر دو شکل مساحت‌های برابر دارند.

تکلیف ۲ زیر جملهٔ درست خط بکشید و پاسخ خود را توضیح دهید. الف) مساحت A با مساحت B برابر است. ب) مساحت A کم‌تر از مساحت B است. ج) مساحت A بیش‌تر از مساحت B است.	A B 

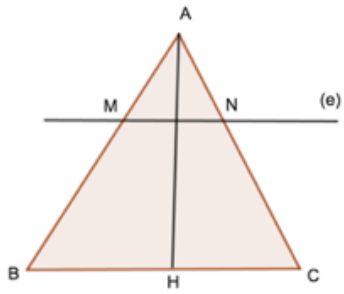
در فرایند کدگذاری پاسخ های دانش آموزان به تکلیف ۲ (کد بوک شکل ۲)، از حرف اول کلمه عملیاتی برای شروع این طبقه‌بندی استفاده شد. با در نظر گرفتن این که در اولین دیدار با شکل هندسی درک دریافتی فراخوانده می شود، پس اولین حرف کلمه دریافتی در ادامه حرف قبلی به‌کار می‌رفت(OP) ۱ .) پاسخ های دانش آموزان به تکلیف مبتنی بر استدلال از یک مسیر درک طبیعی در کد OPD_N قرار داشتند. برای مثال پاسخ های صحیحی که هیچ توضیحی همراهشان نبود در کد OPD_{N1} قرار گرفتند. ۲) پاسخ های دانش آموزان به تکلیف مبتنی بر یک استدلال شکلی محض در کد OPD_C قرار داشتند، این گروه از پاسخ ها از طریق دوباره شکل بندی شکل داده شده که هدف اصلی تکلیف نیز بود، شکل گرفته بودند. این دوباره شکل‌بندی، به شیوه‌های متفاوت انجام‌شده بود. ازجمله: الف) به‌صورت شفاهی توضیح داده‌شده بود که قسمت جلوی شکل بریده شود و در قسمت عقب شکل قرار داده شود. ب) با استفاده از رسم فلش، به قسمت‌هایی که باید بریده شود و چسبانده شود، اشاره‌شده بود. ج) بیان شده بود که قسمت‌های هاشور خورده مساحت‌های برابر دارند. د) عنوان شده بود هر مقداری که به قسمت غربی شکل اضافه‌شده است از قسمت شرقی کم شده است. ه) و در نهایت اظهار کرده بودند اگر شکل A روی شکل B قرار داده شود می‌توان فهمید که قسمتی از شکل B پاک‌شده است و روی ضلع رو به روی آن، چسبانده شده است. ۳) در دسته سوم پاسخ‌ها، اشاره‌شده بود اطلاعات کافی نیست یا نمی‌توان فقط به شکل استناد نمود، بنابراین با شرط داشتن اطلاعات بیشتر، می‌توان با دوباره شکل‌بندی شکل داده شده، نشان داد که هر دو شکل دارای مساحت‌های برابر هستند(OPD_T).



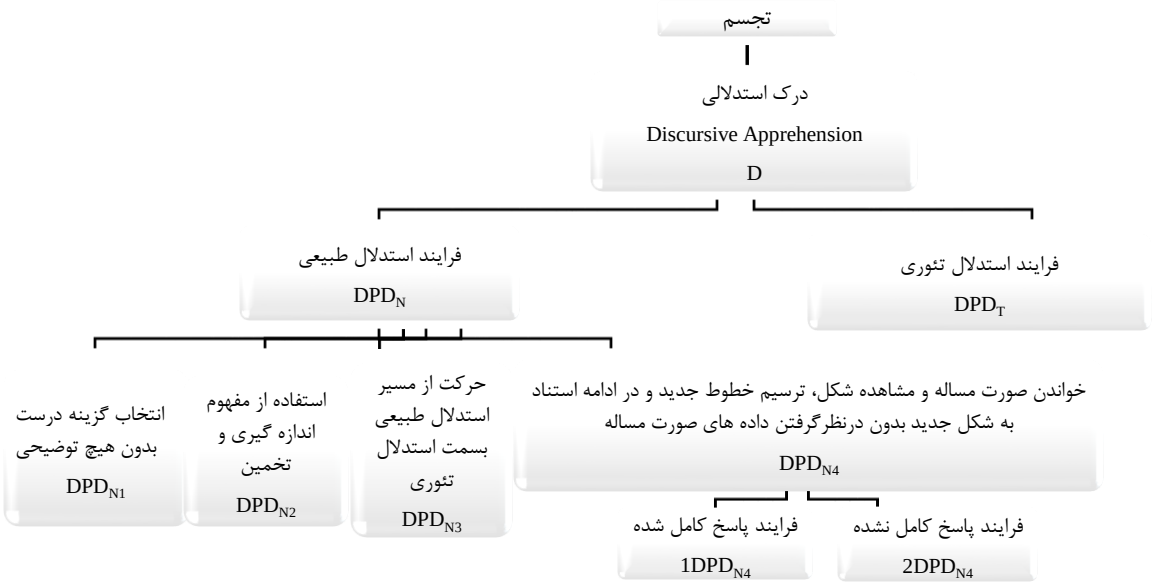
شکل ۳. کدگذاری پاسخ های دانش آموزان مربوط به درک عملیاتی

تکلیف ۳ برای بررسی چگونگی درک استدلالی دانش آموزان در مواجهه با شکل هندسی طراحی شد. از آنجایی که خواص ریاضی در مورد شکل داده شده، در صورت مساله بیان شده بود، برای پاسخ گویی به

تکلیف، می بایست زیر چتر قضایا و تعاریف و همچنین خواص ریاضی اظهارشده در صورت مساله، به انجام حل تکلیف پرداخت. از دانش آموزان خواسته شده بود با توجه به فرض های تکلیف، به مقایسه طول پاره خط های MH و NH بپردازند و فرایند شکل گیری پاسخ خود را توضیح دهند. برای پاسخ دادن به این تکلیف از دیدگاه ریاضیات، چندین مسیر درک استدلالی وجود داشت. در این مسیرهای مشابه دانش آموزان با ایجاد مثلث هایی که دو پاره خط مذکور، دو ضلع متناظر در مثلث ها باشند، شروع به حرکت نموده و به روش های متفاوت هم نهشتی مثلث های یاد شده را نشان دادند. در پایان، برابری پاره خط های خواسته شده در صورت مساله نتیجه گرفته شده بود.

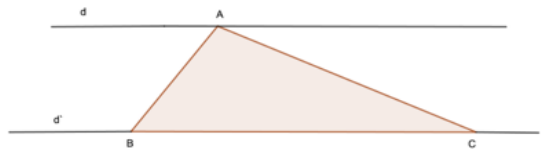
تکلیف۳ در مثلث ABC، AB و AC مساوی هستند، خط (e) موازی با BC و AH ، ارتفاعِ BC است. با توجه به فرض های مساله، پاسخ درست را انتخاب کنید. طول پاره خط NH ، الف) با طول پاره خط MH ، برابر است. ب) از MH ، بزرگ تر است. ج) از MH ، کوچک تر است. د) نمی توان مشخص نمود. دلیل پاسخ خود را توضیح دهید.	

کدگذاری پاسخ‌های دانش‌آموزان به این تکلیف با توجه به پژوهش‌های انجام‌شده (Duval (2011), Michael– Chrysanthou (2013) and Karpuz & Atsoy (2019))، شروع و با بررسی پاسخ‌های دانش آموزان درنهایت به صورتی که در شکل۴ آمده است، تبدیل شد. لازم به ذکر است در خصوص چگونگی نام گذاری این کدها، می‌توان گفت، از آنجایی‌که این تکلیف برای بررسی درک استدلالی بود، لذا از حرف اول کلمه استدلالی برای شروع این طبقه‌بندی استفاده شد. با در نظر گرفتن این که در اولین دیدار با شکل هندسی درک دریافتی فراخوانده می شود، پس اولین حرف کلمه دریافتی در ادامه حرف قبلی به‌کار می‌رفت(DP). این فرایند نام گذاری در همه تکالیف دیده می شود. در ادامه اگر دانش آموز از مسیر درک استدلالی طبیعی فرایند پاسخ گویی به تکلیف را دنبال می نمود، پاسخ در کد DPD_N قرار میگرفت. از طرف دیگر گروهی از دانش آموزان پس از خواندن صورت مساله و مشاهده شکل، خطوطی ترسیم نموده و شکلی اضافه میکردند و در ادامه با استناد به شکل جدید بدون درنظرگرفتن داده های صورت مساله پاسخ خود را کامل نموده ($1DPD_{N4}$) و یا ناقص ($2DPD_{N4}$) رها می کردند. در ادامه تعدادی از دانش آموزان با استفاده از داده های مساله و استنتاج مفاهیم و قضایای مربوطه در مسیر استدلال تئوری به تکلیف پاسخ دادند(DPD_T).



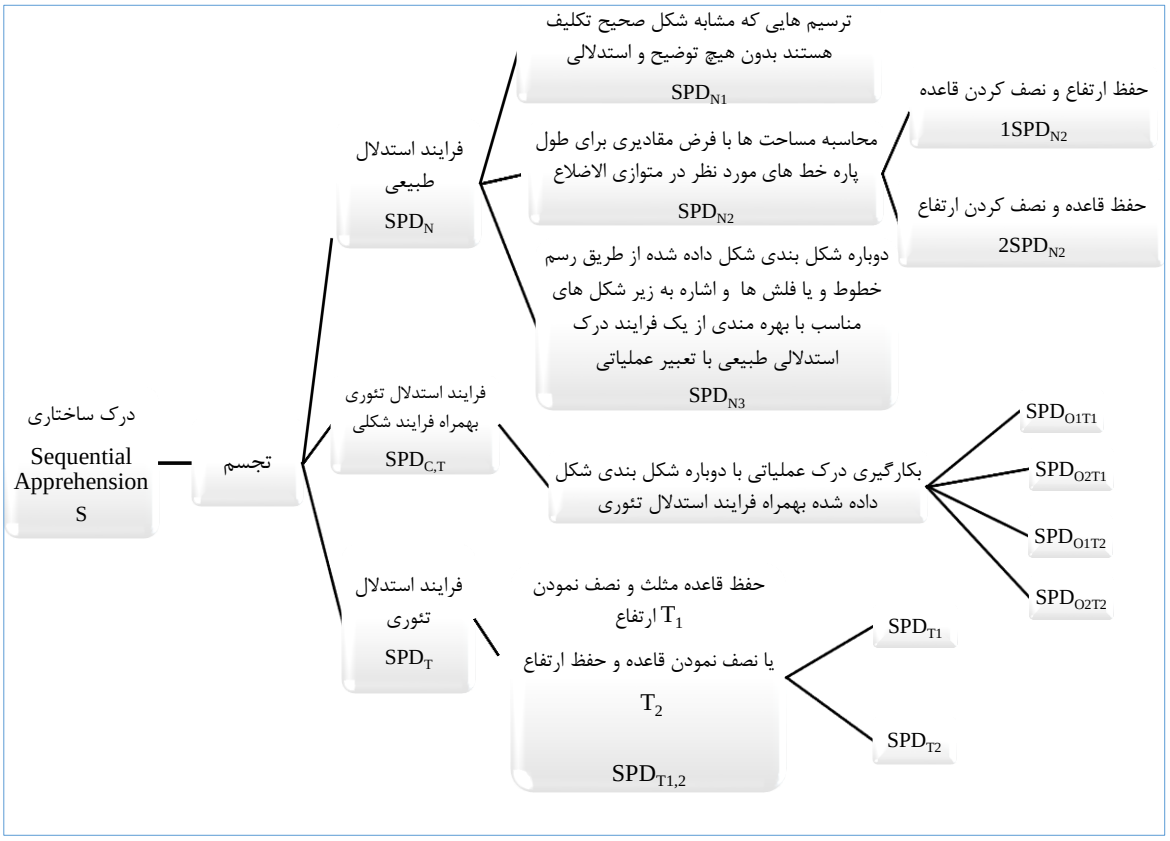
شکل ۴. کدگذاری پاسخ های دانش آموزان مربوط به درک استدلالی

درتکلیف۴، که برای بررسی چگونگی درک ساختاری دانش آموزان در مواجهه با شکل هندسی طراحی شده بود دانش آموزان می بایست دو نقطه در صفحه مشخص نمایند بگونه ای که با دو رأس از مثلث داده شده، متوازی الاضلاعی ساخته شود که مساحتش با مساحت مثلث برابر باشد. انتظار می رفت دانش آموزان از طریق حفظ قاعده مثلث و نصف نمودن ارتفاع یا نصف نمودن قاعده و حفظ ارتفاع، دو نقطه خواسته شده را بیابند.

تکلیف۴ در شکل روبه رو خطوط d و d` موازی هستند. دو نقطه در این صفحه مانند M و N مشخص کنید بطوریکه این دو نقطه بهمراه دو رأس از رأس های مثلث، رئوس متوازی الاضلاعی باشند که مساحتش با مساحت مثلث برابر است. پاسخ خود را بطور کامل توضیح دهید.	

نام گذاری کد ها با حرف اول کلمه ساختاری شروع شد(SP). در ادامه اگر دانش آموز از مسیر درک استدلالی طبیعی فرایند پاسخ گویی به تکلیف را دنبال می نمود در این کد SPD_N قرار میگرفت. برای مثال درکد SPD_{N2} دانش آموزان با فرض مقادیری برای طول پاره خط های مورد نظر در متوازی الاضلاع، مساحت ها را محاسبه نمودند. در این مسیر ارتفاع را حفظ نموده $1SPD_{N2}$ و یا آن را نصف $2SPD_{N2}$ نمودند. از طرف دیگر گروهی از دانش آموزان درکد SPD_{N3} با دوباره شکل بندی شکل داده شده از طریق رسم خطوط و یا فلش ها به زیر شکل های مناسب اشاره نموده و از یک فرایند درک استدلالی طبیعی با

تعبیر عملیاتی بهره بردند. تعدادی از دانش آموزان در مسیر درک استدلال تئوری پس از خواندن صورت مساله و مشاهده شکل، با استنتاج خواص ریاضی از اطلاعات داده شده به انجام حل تکلیف پرداختند(SPD_T). از طرف دیگر دانش آموزانی بودند که در در مسیر درک استدلال تئوری ، از دوباره شکل بندی شکل داده شده نیز بهره بردند($SPD_{C,T}$). این دوباره شکل بندی از دو مسیر رخ داده بود: در مسیر اول با استفاده از مثلث داده شده یک متوازی الاضلاع ساخته سپس مساحت شکل جدید را نصف نمودند. ($SPD_{O1T1,2}$). در مسیر دوم متوازی الاضلاعی بر روی قاعده مثلث رسم نمودند و همزمان نشان دادند مثلث های بوجود آمده هم نهشت هستند($SPD_{O2T1,2}$).



شکل ۵. کدگذاری پاسخ های دانش آموزان مربوط به درک ساختاری

یافته‌های تحقیق

در این قسمت نتایج تجزیه و تحلیل کیفی پاسخ‌های دانش‌آموزان به چهار تکلیف در آزمون به تفکیک ارائه می‌شود.

یافته‌های مربوط به تکلیف ۱

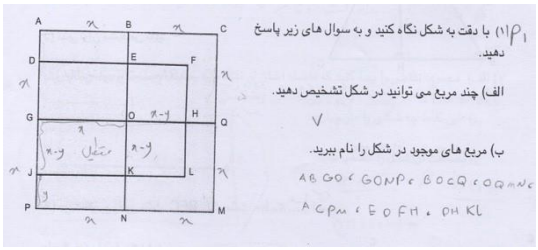
در تکلیف ۱ شکل‌ها به‌گونه‌ای ساخته‌شده‌اند تا مربع به نظر برسند. از دیدگاه ریاضیات، دانش‌آموز نمی‌توانست با اطمینان بگوید که این شکل‌ها مربع هستند زیرا هیچ دلیلی برای مربع بودن ارائه نشده است. هرچند، تعدادی از دانش‌آموزان برای تشخیص مربع بودن شکل‌ها، تقاضای خط کش می‌کردند تا برای اندازه‌گیری طول پاره‌خط‌ها از آن استفاده کنند. درطول اجرای آزمون دانش‌آموزان سؤال‌هایی در رابطه با چگونگی پاسخگویی به تکلیف می‌پرسیدند و محقق تا آنجایی که امکان داشت آنان را راهنمایی می‌کرد. جدول شماره ۶ توزیع فراوانی پاسخ‌های دانش آموزان به تکلیف۱درخصوص درک دریافتی را نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود تعداد زیادی از دانش‌آموزان پایه نهم (۶۱,۹۶٪) هفت مربع در شکل را تشخیص داده‌اند اما در پایه دهم حدود نیمی از دانش‌آموزان این تعداد مربع را تشخیص دادند (۵۱,۱۱٪). با اینکه انتظار می‌رفت دانش‌آموزان در پایه‌های بالاتر در انجام تکلیف هندسی، فقط به داده‌های شکلی اکتفا ننموده و به دنبال اطلاعات دقیق در صورت مسأله باشند اما ۷۷/۳۲٪ درصد از دانش‌آموزان پایه یازدهم به این تکلیف با بکارگیری درک دریافتی پاسخ داده بودند و بندرت دچار این تردید گشته بودند که«آیا چهارضلعی‌های موجود در شکل مربع هستند؟» و یا برای این‌که شکلی مربع باشد بایستی چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟ بنابراین، بیشتر دانش‌آموزان دراین تکلیف، اطلاعات لازم برای حل مسئله را با توجه به طبیعت شیء مانند شکل هندسی، از ساختمان آن استنتاج و به آن پاسخ داده بودند. برخی از دانش‌آموزان کلاس دهم (۱۳,۳۳ درصد) و کلاس یازدهم (۱۰/۳۱ درصد) در این آزمون از روش اندازه‌گیری استفاده کرده و نتیجه گرفته بودند که مربعی وجود ندارد. تعدادی از دانش‌آموزان پایه دهم (۱۳,۳۳درصد) با اطمینان بیان کرده بودند نمی‌توانند فقط به داده‌های شکلی اکتفا کنند و ادعا کردند که هیچ مربعی در شکل وجود ندارد. این میزان در پایه نهم کمتر از ۱درصد و در پایه یازدهم حدود ۳ درصد دانش آموزان را تشکیل می‌داد.

جدول شماره ۶. توزیع فراوانی پاسخ های دانش آموزان به تکلیف ۱ با تفکیک کدها مربوط به درک دریافتی

تکلیف ۱	PD_N					PD_T	Total
	PD_{N1}	PD_{N2}	PD_{N3}	PD_{N4}			
پایه نهم	۱۰۱	۴۲	۱۶	۳	۱۶۲	۱	۱۶۳
پایه دهم	۲۳	۵	۵	۶	۳۹	۶	۴۵
پایه یازدهم	۷۵	۵	۴	۱۰	۹۴	۳	۹۷

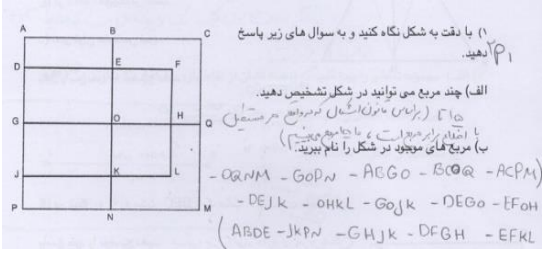
چگونگی شکل‌گیری پاسخ‌های دانش آموزان به تکلیف ۱

در خصوص شکل‌گیری پاسخ های دانش‌آموزان به چند مورد متفاوت می توان اشاره نمود، دانش آموز پایه نهم برای شمردن همهٔ هفت مربع از رنگ‌آمیزی استفاده کرده است تا بتواند مربع‌های زیرین را به‌درستی بشمارد. دانش‌آموز دیگری چهارضلعی بزرگ را مربع فرض کرده (درک دریافتی) سپس با رسم خطوط تقارن، چهار مربع بعدی را نیز تشخیص داده بود. هرچند برای اثبات مربع بودن دو چهارضلعی EFHO و OHLK اذعان داشته بود که دلیلی در اختیار ندارد، با این حال تلاش او برای استفاده از استدلال استنتاجی دیده می شود. در نتیجه با فرض مربع بودن چهارضلعی بزرگ، به نظر می‌رسد استخراج روابط هندسی از ساختمان شکل، نه بصورت کامل، بلکه تا حدودی برای دانش آموز قابل‌قبول بوده است.

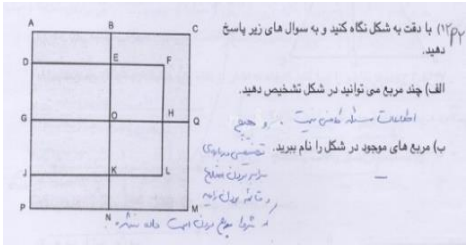


شکل ۶. پاسخ دانش آموز پایه نهم به تکلیف ۱ با فرض مربع بودن چهار ضلعی بزرگ PD_{N1}

در شکل ۷ دانش‌آموز به‌درستی تعریف مربع را بیان نموده، اما درک کاملی از آن ندارد. در اینجا حتی درک دریافتی، او را دچار این تردید نکرده است که «آیا تعریف مربع را به‌درستی به‌کاربرده است؟ تعدادی از دانش‌آموزان پایه دهم اطلاعات مسئله را برای پاسخ‌گویی کافی ندانسته و بیان کردند که نمی‌توانند برای حل مسئله فقط به شکل استناد کنند. در شکل۸ کامل‌ترین پاسخ از دیدگاه ریاضیات به فعالیت داده‌شده است. این دانش‌آموز پایه دهم توانسته بود بین درک طبیعی و درک ریاضیاتی خویش در نگاه نمودن به شکل هندسی، ارتباط برقرار نماید.



شکل ۷، پاسخ دانش‌آموز به تکلیف ۱ و عدم درک درست او از تعریف مربع PD_{N2}



شکل ۸، پاسخ کامل یک دانش آموز به تکلیف ۱ با استفاده از درک دریافتی بهمراه استدلال تئوری

یافته های مربوط به تکلیف ۲

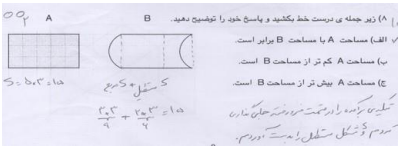
در تکلیف ۲ شکل ها بر روی صفحه شطرنجی قرار داده شده بودند تا بخشی از خواص ریاضی مورد نیاز برای استدلال، بدین گونه فراهم گردد. همان‌طور که در جدول ۷ دیده می‌شود، نیمی از پاسخ‌های درست

دانش‌آموزان پایه نهم با بکارگیری یک استدلال طبیعی شکل‌گرفته بود. این پاسخ‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند، دسته اول شامل پاسخ‌هایی است که با یک نگاه اجمالی به شکل بدون هیچ استدلالی داده شده‌اند (۱۹/۸۴٪). دسته دوم خود به دوقسمت تقسیم می شدند: گروه اول با بکارگیری تخمین وحدس به یافتن پاسخ پرداختند(۱۰/۳۲٪) و گروه دوم با استفاده از مفهوم مساحت (۱۹/۸۴٪) به تکلیف جواب دادند. در دسته سوم ۶/۳۵٪ از دانش آموزان برای پاسخگویی به تکلیف، دوباره شکل بندی شکل داده شده را کافی ندانسته و به محاسبه مساحت نیز پرداختند. از طرف دیگر، ۴۳/۶۵٪ درصد پاسخ‌های دانش آموزان پایه نهم با استفاده از درک عملیاتی ارائه شده بودند(OPD_C). در کد OPD_T پاسخ هایی قرار داشتند که بیان می نمود داده‌های مسئله کافی نیست و به شرط داشتن اطلاعات بیشتر با بکارگیری رویکرد دوباره شکل‌بندی شکل داده شده، مساحت‌ها برابر هستند. لازم به ذکر است هیچ‌کدام از دانش‌آموزان پایه نهم در این دسته قرار نگرفته بودند. در خصوص عملکرد دانش‌آموزان پایه دهم، مطالعه نشان داد که ۴۷/۵۰٪ آنان، به این تکلیف با بکارگیری درک عملیاتی پاسخ داده بودند. با این وجود ۲۲/۵۰٪ از دانش‌آموزان پایه دهم، برای اطمینان از درستی پاسخ خود، مسیر درک عملیاتی را کافی ندانسته و با الهام از نقش توصیفی شکل، از مفهوم مساحت استفاده و با محاسبه آن، برابری مساحت دو شکل را نتیجه گرفته بودند.

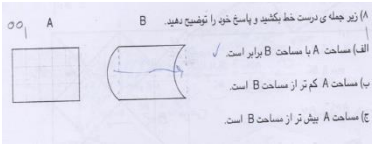
جدول شماره ۷، توزیع فراوانی پاسخ های دانش آموزان به تکلیف ۲ با تفکیک کدها مربوط به درک عملیاتی

تکلیف ۲	OPD_N					OPDc	OPD_T	Total
	OPD_{N1}	$1OPD_{N2}$	$2OPD_{N2}$	OPD_{N3}				
پایه نهم	۲۵	۱۳	۲۵	۸	۷۱	۵۵	۰	۱۲۶
پایه دهم	۲	۲	۶	۹	۱۹	۱۹	۲	۴۰
پایه یازدهم	۷	۴	۲۰	۱۵	۴۶	۳۷	۱	۸۴

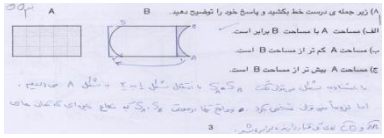
چگونگی شکل‌گیری پاسخ‌های دانش آموزان به تکلیف ۲



شکل ۹، پاسخ یک دانش آموز به تکلیف ۲ از طریق استدلال طبیعی با بکارگیری مفهوم مساحت و دوباره شکل بندی OPD_{N3}



شکل ۱۰، پاسخ یک دانش آموز به تکلیف ۲ با استفاده از درک عملیاتی OPD_C



شکل ۱۱، برشی متفاوت در به‌کارگیری نقش رهیافتی شکل OPD_T

دانش آموز در شکل ۹ با بکارگیری درک عملیاتی بهمراه نقش توصیفی شکل با محاسبه مساحت ها، رأی به تساوی مساحت ها می دهد. درشکل۱۰ دانش آموز با بهره گیری از نقش توصیفی شکل بهمراه استفاده از تنها یک فلش درک عملیاتی خود را از طریق دوباره شکل بندی به نمایش گذاشته است. در شکل ۱۱، دانش‌آموز ادعا می‌نماید می‌توان با انتقال شکل ۱به شکل۲، که همان بکارگیری درک عملیاتی

است، برابری مساحت‌ها را نشان داد. اما او تأکید می‌کند که هر دو کمان داده‌شده در شکل، می‌بایست از دایره‌هایی با شعاع‌های برابر باشند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، دانش‌آموز برای استفاده از نقش رهیافتی شکل، تصمیم به برش متفاوتی گرفته است. به نظر Mesquita (1998)، نقش یک شکل هندسی، به رفتار فرد نیز بستگی دارد.

یافته های مربوط به تکلیف ۳

در تکلیف ۳، از دانش آموزان خواسته شده بود با توجه به فرض های تکلیف، به مقایسه طول پاره خط های MH و NH بپردازند و فرایند شکل گیری پاسخ خود را توضیح دهند. جدول ۸ توزیع فراوانی پاسخ های صحیح دانش آموزان به تکلیف ۳ را به تفکیک کدها درباره درک استدلالی نشان می دهد. همان طور که در جدول دیده می شود، بیش از ۹۰ درصد پاسخ های صحیح دانش آموزان پایه نهم(۹۹/۱۹٪)، از طریق یک فرایند استدلال طبیعی رخ داده است. همان طورکه اشاره گردید با اینکه دانش آموزان پایه نهم با مفهوم استدلال در هندسه آشنا بودند و می دانستند که لازم است تا فرایند پاسخگویی خود را توضیح دهند اما تنها ۸,۸۷٪ از دانش آموزان فرایند درک دریافتی اشان بسمت درک استدلالی بود و بیش از نیمی از آنان(۵۱,۶۱٪) با یک نگاه اجمالی به شکل و با تیک زدن گزینه صحیح، به تکلیف پاسخ دادند. کمرنگی رشد حرکت از درک دریافتی به سمت درک استدلالی در پایه های دهم و یازدهم نیز قابل توجه بود(پایه دهم، ۱۱,۱۱٪ و پایه یازدهم، ۱۲,۶۴٪). همانند دو تکلیف قبل، دانش آموزان پایه دهم که بهره مند از آموزش متفاوت هندسه نسبت به دو پایه دیگر بودند، از درک دریافتی برای پاسخ گویی به تکلیف، کمتر از دیگر دانش آموزان بهره بردند(۲۲,۲۲٪).

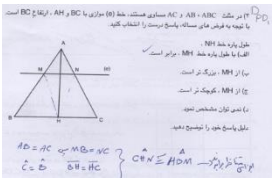
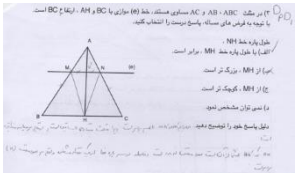
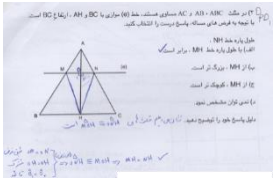
جدول شماره ۸، توزیع فراوانی پاسخ های دانش آموزان به تکلیف ۳ با تفکیک کدها مربوط به درک استدلالی

تکلیف ۳	DPD_N					DPD_T	Total
	DPD_{N1}	DPD_{N2}	DPD_{N3}	$1DPD_{N4}$	$2DPD_{N4}$		
پایه نهم	۶۴	۲۹	۱۱	۱۴	۵	۱۲۳	۱	۱۲۴
پایه دهم	۸	۲	۴	۱۱	۳	۲۸	۸	۳۶
پایه یازدهم	۲۶	۱۱	۱۱	۲۶	۴	۷۸	۹	۸۷

چگونگی شکل‌گیری پاسخ‌های دانش آموزان به تکلیف ۳

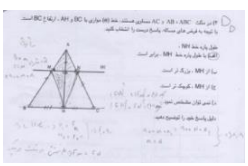
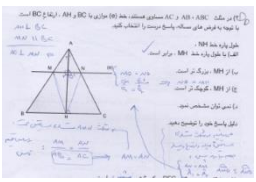
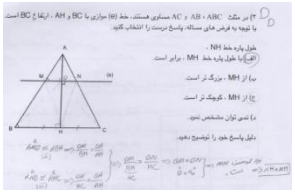
با تجزیه و تحلیل کیفی پاسخ ها به تکلیف ۳، مشاهده می شود در شکل۱۲، دانش آموز ابتدا با استفاده از یک فرض که در بیان تکلیف نیامده است، با بکارگیری درک استدلالی، شروع به برقراری هم نهشتی نموده و در ادامه با استفاده از تساوی اجزای متناظر، درستی حکم را اثبات کرده است. در پایه نهم دانش آموز، تنها با چیدمان درست اجزای لازم برای برقراری هم نهشتی، بدون بیان هیچ استدلالی، مسیر حل را پیموده است. اما در پایه های دهم و یازدهم دانش آموز که با استدلال هندسی آشنا تر است تلاش کرده

با فرض های خود ساخته، با آگاهی از فرایند حل مساله به انجام تکلیف بپردازد گرچه همیشه موفقیت آمیز نبوده است.

		
پایه نهم	پایه دهم	پایه یازدهم

شکل ۱۲، پاسخ هایی به تکلیف ۳ از طریق فرایند استدلال تیوری بهمراه فرض هایی خودساخته $1DPD_{N4}$

از دیدگاه ریاضیات پاسخ های درست در کد مربوط به شکل ۱۳، قرار داده شدند. در شکل زیر نمونه پاسخ هایی از هر سه پایه، دیده می شود. در پایه نهم فقط پاسخ یک دانش آموز کاملا مبتنی بر فرایند استدلال تئوری بود. از آنجایی که دانش آموزان در پایه نهم با مفاهیمی چون خطوط موازی و خط مورب، رابطه فیثاغورس،... آشنا می شوند، این دانش آموز نیز به درستی با بهره مندی از آن ها، به تکلیف پاسخ صحیح داده است. در پایه دهم نیز دانش آموز با توجه به اینکه به تازگی با قضیه تالس آشنا گشته، فرض های مورد نیاز خود را از نتایج این قضیه، تأمین کرده است. در پایه یازدهم نیز دانش آموز با استفاده از مفهوم تشابه و بکارگیری آن در مثلث های متشابه، تساوی پاره خط های مورد نیاز را ثابت نموده و به پشتوانه واقعیت ها در مورد خطوط موازی و خط های عمود بر آن ها، و همچنین ویژگی نقاط برروی عمودمنصف یک پاره خط، کار را تمام کرده است.

		
پایه نهم	پایه دهم	پایه یازدهم

شکل ۱۳، پاسخ هایی به تکلیف ۳ مبتنی بر فرایند استدلال تئوری DPD_T

در جدول شماره ۹، می توان توزیع فراوانی پاسخ های دیگر را مشاهده نمود. تعدادی از دانش آموزان دلیل انتخاب گزینه ب را بدین گونه عنوان کردند: مثلث بطور دقیق از وسط نصف نشده است. یا اینکه گفته اند ارتفاع به سمت راست متمایل است. گرچه تعدادی از دانش آموزان این استدلال را برای انتخاب گزینه ج استفاده کردند. برای انتخاب گزینه د، اینگونه استدلال نمودند که نمی توانند با نگاه نمودن به شکل، پاسخ دهند و یا اینکه هیچ اندازه ای داده نشده تا مقایسه انجام شود. همانطور که مشاهده می شود دانش آموزان بدنبال استنتاج حقایق مورد نیاز خود، از شکل داده شده، برای پاسخ گویی به تکلیف بودند. بنابراین تعداد بیشتری از آنان در هر سه پایه، گزینه د، را انتخاب نمودند.

جدول شماره ۹، توزیع فراوانی بقیه پاسخ های دانش آموزان به تکلیف ۳، درک استدلالی

تکلیف ۳	PD_N				
	گزینه ب	گزینه ج	گزینه د	پاسخ نداده	مجموع
پایه نهم	۸	۸	۱۶	۷	۳۹
پایه دهم	۰	۲	۶	۱	۹
پایه یازدهم	۱	۲	۶	۱	۱۰

یافته های مربوط به تکلیف ۴

در تکلیف ۴ از دانش آموزان خواسته شده بود که مبتنی بر یک مثلث داده شده یک متوازی الاضلاع رسم کنند بگونه ای که مساحت هایشان برابر باشد. دانش آموزان با توضیح چگونگی شکل گیری پاسخ خود، مسیر طی شده برای ترسیم را آشکار می نمودند. همانطور که در جدول ۱۰ دیده می شود، بیش ازهفتاد درصد دانش آموزان پایه نهم برای پاسخگویی به این تکلیف درک ساختاری، فرایند استدلال طبیعی را انتخاب کردند(۷۲,۴۱٪). از طرف دیگر پایه های دهم(۲۳,۵۳٪) و یازدهم(۳۰,۱۹٪) تقریبا نزدیک بهم همین مسیر را برای پاسخگویی به این تکلیف برگزیدند. نکته قابل توجه این بود با اینکه دانش آموزان پایه نهم نسبت به تکلیف ۱، از درک دریافتی کنترل شده با استدلال، کم تر استفاده کرده بودند، با بکارگیری دوباره شکل بندی شکل داده شده در مسیر استدلال طبیعی(۲۷,۵۹٪)، نسبت به دانش آموزان پایه دهم(۱۱,۷۶٪) و یازدهم(۱۶,۹۸٪) از نقش رهیافتی شکل هندسی در این تکلیف بیشتر بهره بردند. برای پاسخ دادن به این تکلیف مبتنی بر فرایند استدلال تئوری، دو مسیر درک استدلالی وجود داشت: وسط پاره خط BC را پیدا کرده و آن را M نام گذاری کنند حال با در نظر گرفتن BM بعنوان قاعده می توان از نقطه M به موازات AB خطی رسم نمود تا d را قطع کند. مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده با مساحت مثلث برابر است. این مسیربا T_1 مشخص شده است. یا نقطه ای روی وسط ارتفاع خارج شده از رأس A در مثلث ABC ، در نظر گرفته و از آن نقطه به موازات BC خط(e) رسم کنند. حال با در نظر گرفتن BC بعنوان قاعده، با انتخاب دو نقطه روی خط(e) موازی BC می توان متوازی الاضلاعی ساخت که مساحتش با مساحت مثلث برابر است.

این مسیر با T_2 مشخص شده است. همانطور که در جدول ۱۰ دیده می شود ۲۷,۵۹٪ از پاسخ های صحیح دانش آموزان پایه نهم به این تکلیف، در این دو مسیر درک استدلالی قرار داشت. آشنایی بیشتر با

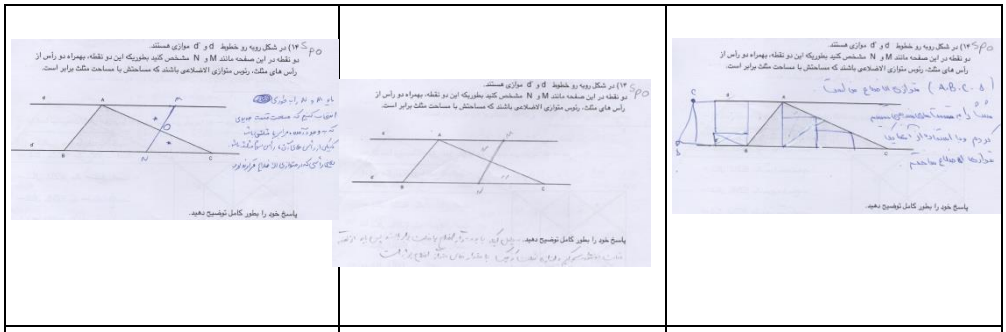
استدلال هندسی، همان طور که انتظار میرفت، به دانش آموزان در پایه های دهم(۷۶,۴۷٪) و یازدهم(۶۹,۸۱٪)، کمک نمود تا تقریبا ۷۰٪ آنان، یا بیشتر، مسیر استدلال تئوری را برای پاسخ گویی به این تکلیف انتخاب کنند. نکته قابل توجه که از جدول مشاهده می شود این است، در میانه راه انتخاب مسیر درک استدلال تئوری ، تعدادی از دانش آموزان در هر سه پایه با بکارگیری درک عملیاتی، فرایند پاسخ گویی به تکلیف را کامل نمودند. بدین گونه که با دوباره شکل بندی، به زیبایی از نقش رهیافتی شکل داده شده بهره بردند. در این مسیر دو گروه پاسخ وجود داشت. درگروه اول که با کد $SPD_{O1T1,2}$ مشخص شده اند، ابتدا دانش آموزان با رسم یک خط به موازات AB از نقطه C یک متوازی الاضلاع رسم نمودند سپس با آگاهی از اینکه این متوازی الاضلاع رسم شده، مساحتش دو برابر مساحت مثلث مفروض است، با رسم یک خط دیگر به موازات AB شکل رسم شده را، نصف نمودند. در گروه دوم که با کد $SPD_{O2T1,2}$ مشخص شده اند، دانش آموزان پس از نصف نمودن قاعده، در ادامه با نشان دادن هم نهشتی مثلث های بوجود آمده، از مسیرهای متفاوت، و اشاره به هم پوشانی این مثلث ها، با دوباره شکل بندی شکل داده شده، فرایند حل مساله را به پایان رساندند.

جدول شماره ۱۰، توزیع فراوانی پاسخ های دانش آموزان به تکلیف ۴ با تفکیک کدها مربوط به درک ساختاری

تکلیف ۴	SPD_N					$SPD_{C,T}$					SPD_T				Total
	SPD_{N1}	$1SPD_{N2}$	$2SPD_{N2}$	SPD_{N3}		SPD_{O1T1}	SPD_{O2T1}	SPD_{O1T2}	SPD_{O2T2}		SPD_{T1}	SPD_{T2}		
پایه نهم	۱۶	۶	۴	۱۶	۴۲	۱	۴	۰	۳	۸	۲	۶	۸	۵۸
پایه دهم	۳	۱	۰	۴	۸	۴	۳	۰	۱	۸	۱۴	۴	۱۸	۳۴
پایه یازدهم	۵	۱	۱	۹	۱۶	۱۰	۶	۱	۲	۱۹	۱۶	۲	۱۸	۵۳

چگونگی شکل‌گیری پاسخ‌های دانش آموزان به تکلیف ۴

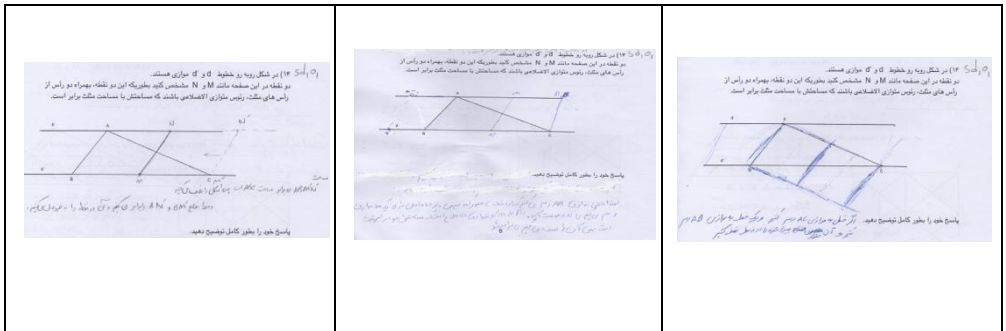
دانش آموز پایه نهم، در شکل ۱۴ با بکارگیری درک عملیاتی، سعی نمود تا با دوباره شکل بندی شکل داده شده، به تکلیف پاسخ دهد. همانگونه که در شکل مشاهده می شود او با تقسیم شکل داده شده به قسمت های هندسی کوچکتر و دوباره ساختن در مسیری دیگر، در فرایند استدلال طبیعی با تعبیر عملیاتی تلاش نموده تا متوازی الاضلاع خواسته شده را، بسازد.



پایه نهم	پایه دهم	پایه یازدهم

شکل ۱۴، پاسخ های دانش آموزان به تکلیف ۴ مبتنی بر مسیر استدلال طبیعی بهمراه تعبیر عملیاتی SPD_{N3}

در فرایند بکارگیری استدلال تئوری مشاهده گردید تعدادی از دانش آموزان با بهره مندی از رویکرد رهیافتی تکلیف، به آن پاسخ دادند. در شکل ۱۵، دانش آموز پایه نهم ابتدا با رسم یک خط، به موازات ضلع مثلث، متوازی الاضلاعی شامل مثلث مفروض را در مسیری متفاوت نسبت به بیشتر دانش آموزان(رسم خط بسمت پایین)، ترسیم نموده سپس آن را با رسم خطی دیگر، نصف می کند. این نوع ترسیم شکل را که به عقیده Mesquita (1998)، ترسیم شکلی متداول نبود، دانش آموزان بندرت در تجربه های کلاسی شاهد هستند. دانش آموزان پایه های بالاتر نیز با آگاهی از ارتباط بین مساحت های متوازی الاضلاع و مثلث در مسیر استدلال تئوری با دوباره شکل بندی شکل داده شده با موفقیت توانستند شکل خواسته شده را رسم کنند.

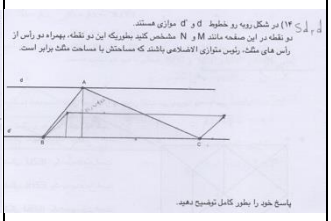
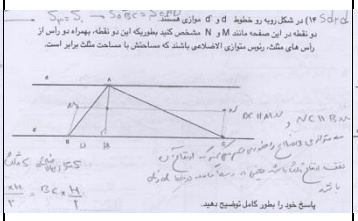
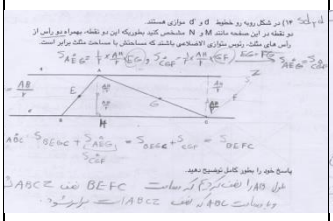


پایه نهم	پایه دهم	پایه یازدهم

شکل ۱۵، پاسخ های دانش آموزان به تکلیف ۴ مبتنی بر رویکرد استدلال طبیعی بهمراه دوباره شکل بندی SPD_{O1T1}

تعدادی از دانش آموزان تقریبا به تعداد یکسان در پایه های نهم و دهم از مسیر شماره ۲ درک استدلالی برای پاسخ گویی به تکلیف بهره بردند. همانطور که در جدول شماره ۱۰، مشاهده می شود، در پایه یازدهم استقبال از این مسیر بسیار کم بود. در پایه نهم مطابق با شکل ۱۶، دانش آموز با نصف نمودن ارتفاع مثلث

و حفظ قاعده آن، یک متوازی الاضلاع ترسیم نموده که مساحتش با مساحت مثلث برابر است. با اینکه هیچ توضیحی نوشته نشده، ولی بخوبی می توان استدلال های ذهنی دانش آموز را مشاهده نمود. در پایه دهم دانش آموز دو رأس جدید متوازی الاضلاع را لزوماً بر روی اضلاع مثلث، در نظر نمی گیرد تا نشان دهد برای این تکلیف می توان شکل های متعدد رسم نمود. در پایه یازدهم دانش آموز با بکارگیری درک استدلال تئوری تلاش نموده، با استفاده از فرمول مساحت و نوشتن روابط ریاضی، یک استدلال محکم و از منظر خویش بی عیب و نقص را در قالب خواسته شده که می تواند متأثر از چگونگی تدریس انجام شده باشد، به نمایش بگذارد. تدریس هندسه در قالب های از پیش تعیین شده از سوی معلم، آشکارا، آزادی عمل دانش آموز را کاهش داده است.

پایه نهم	پایه دهم	پایه یازدهم
		

شکل ۱۶، پاسخ های دانش آموزان به تکلیف ۴ مبتنی بر رویکرد استدلال تئوری SPD_{T2}

همانطور که در جدول ۱۱، مشاهده می شود، ۴۷/۷۳٪ دانش آموزان در پایه یازدهم، تکلیف را بدون پاسخ رها نمودند که نسبت به دو پایه دیگر این اتفاق بیشتر رخ داد. پاسخ های اشتباه به سه گروه تقسیم شدند. در گروه اول دانش آموزان با استدلال نادرست از فرمول مساحت مثلث، مسیر دو برابر نمودن قاعده و یا ارتفاع، در متوازی الاضلاع را دنبال نمودند. در گروه بعدی، دانش آموزان با رسم یک خط از رأسC به موازات AB یک متوازی الاضلاع رسم نمودند بدون آنکه به شرایط گفته شده در بیان مساله توجه نمایند. در اینجا به نظر میرسد پس از رسم متوازی الاضلاع، اگر دانش آموزان فرصت بازتاب به فرایند ترسیم خویش می دادند، با بکارگیری درک دریافتی خود در نگاه نمودن به شکل رسم شده، موفق به اصلاح اشتباه خویش می گشتند. در گروه سوم پاسخ های اشتباه، شکل هایی ترسیم شده بود که هیچ کدام متوازی الاضلاع نبودند. برای مثال ذوزنقه و یا چهارضلعی های نامشخص.

جدول ۱۱، توزیع فراوانی بقیه پاسخ های دانش آموزان به تکلیف ۴، درک ساختاری

تکلیف ۴		از نقطه C به موازات AB		پاسخ داده نشده است.	مجموع

		شکل های دیگری رسم شده است مانند ذوزنقه	رسم شده است	استدلال نادرست از فرمول مساحت، برای مثال، قاعده(ارتفاع) بجای انکه نصف شود، دو برابر شده است.	
۱۰۵	۳۴	۲۷	۳۶	۸	پایه نهم
۱۱	۴	۱	۴	۲	پایه دهم
۴۴	۲۱	۶	۱۷	۰	پایه یازدهم

بحث و نتیجه گیری

این مطالعه به طور خاص به بررسی درک‌های دانش‌آموزان متوسطه در مواجهه با شکل هندسی حین انجام تکالیف هندسی مبتنی بر درک های شناختی شکل هندسی Duval, (1998) می پردازد. مشارکت این مطالعه در ادبیات موجود، شناسایی الگوهای جدید استدلال، نشأت گرفته از توسعه کدگذاری های پاسخ های دانش آموزان در پژوهش های قبلی است، که بواسطه آن دانش ما را از چگونگی درک های بکار گرفته شده دانش‌آموزان حین انجام تکالیف هندسه که شامل شکل‌های هندسی هستند، غنی می‌کند. یافته های این مطالعه از تکلیف اول همراستا با تحقیق Michael– Chrysanthou & Gagatsis (2013) نشان داد که تعداد زیادی از دانش‌آموزان هر سه‌پایه موفق شدند با بکارگیری درک دریافتی، همه مربع های موجود در شکل یا دو مربع واضح را مشخص نمایند. در این بین، همسو با یافته‌های Mesquita (1998) مشخص گردید تعداد قابل توجهی از دانش آموزان، ویژگی های ساختاری شکل هندسی داده شده را منبع قابل اعتمادی برای به دست آوردن اطلاعات لازم برای حل تکلیف در نظر می گیرند. البته استراتژی‌های استدلالی جدیدی در پاسخ‌های برخی از دانش‌آموزان نیز وجود داشت که در پژوهش های قبلی دیده نشده بود. به عنوان مثال، در شکل ۶ یک دانش‌آموز با فرض اینکه چهارضلعی بزرگ یک مربع است با استفاده از خطوط تقارن ، چهار مربع دیگر را مشخص نموده است. یا اینکه تعدادی از دانش آموزان با استفاده از خط کش یا تخمین طول پاره خط، با استفاده از مسیر استدلال طبیعی، نتیجه گرفتند مربعی درشکل وجود ندارد. از طرف دیگر تعدادی از دانش‌آموزان نیز اطلاعات موجود برای حل تکلیف ۱ را کافی ندانسته و بیان کرده بودند که نمی‌توانند فقط به داده‌های شکلی استناد کنند، لذا پاسخ دادند که هیچ مربعی در شکل وجود ندارد. این یافته ها در هیچ‌کدام از پژوهش‌های مربوط به درک شکل هندسی، مشاهده نگردیده بود. این نتیجه ممکن است در خصوص تأثیر متفاوت آموزش هندسه ای باشد که برخی از دانش آموزان در هر سه پایه از آن برخوردار گشته بودند.

با بررسی های بعمل آمده مشخص گردید در این آموزش متفاوت، بر پیوند بین مسیر درک طبیعی و مسیر درک ریاضیاتی نگاه کردن به شکل هندسی، تمرکزی آگاهانه وجود داشت. شواهد نشان داد که روش یاددهی و یادگیری هندسه به این گروه از دانش‌آموزان کمک کرده بود تا در نگاه کردن به شکل هندسی در مسیردرک دریافتی متوقف نشده و با بکارگیری استدلال درفضای هندسی به انجام فعالیت بپردازند. درپژوهش‌های قبلی پاسخ درست به این تکلیف از دیدگاه ریاضیات، تشخیص هفت مربع موجود، ارزیابی

شده بود اما در مطالعه حاضر همان‌طورکه در یافته‌ها اشاره گردید، پاسخ درست به این تکلیف، مبتنی بر فرایند استدلال تئوری، ازآنجایی‌که هیچ اطلاعاتی در مورد چهارضلعی‌های رسم شده در بیان مسئله نیامده بود، بدین گونه است: هیچ مربعی در شکل وجود ندارد. درتکلیف ۲ برای بررسی درک عملیاتی دانش آموزان، تمرکز برروی توانایی های آنان دردوباره شکل بندی شکل داده شده بود. یافته‌های این پژوهش درتکلیف مربوط به درک عملیاتی، در راستای پژوهش‌های قبلی ((Duval(1998؛ Mariotti (1995)؛ Michael– Chrysanthou & Gagatsis (2013)) نشان داد، گرچه انتظار می‌رود، شکل هندسی نقش حمایتگری در انجام تکالیف هندسه داشته باشد، اما این پشتیبانی، برای بیشتر دانش‌آموزان آشکار نیست. با بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان نقش‌های متفاوتی از شکل هندسی در حل تکلیف مشاهده شد.

این عملکرد متمایز، متأثر از مسیر نگاه آن‌ها به شکل هندسی بود. بنابراین بیش از نیمی از دانش‌آموزان پایه نهم از مسیر درک دریافتی به این تکلیف پاسخ دادند. در مسیر درک استدلال طبیعی، دانش‌آموزان هر سه‌پایه برخلاف تکلیف۱، با اختلاف کم، با استفاده از مفهوم مساحت و بکارگیری ابزار اندازه‌گیری، به تکلیف، از مسیر درک عملیاتی پاسخ دادند. به نظر می‌رسد وجود صفحه شطرنجی، دانش‌آموزان را در بهره‌مندی از نقش توصیفی شکل و محاسبه مساحت، ترغیب کرده بود. در بکارگیری درک عملیاتی برای انجام تکلیف در راستای پژوهش‌های قبلی Michael– Chrysanthou & Gagatsis (2013), Gridos et al. (2021), and Karpuz & Atasoy (2019) ، در مسیر گذر از دوره اول به دوره دوم متوسطه، تدریس معمول هندسه به دانش‌آموزان در جهت غلبه بر مسیر درک طبیعی نگاه کردن به شکل هندسی، به سمت استفاده رهیافتی از آن، کمک زیادی ننموده بود. نکته قابل‌توجه این است که دانش‌آموزان پایه یازدهم که برای انجام فعالیت‌های هندسه در این سال‌ها، با توجه به محتوی کتاب‌های درسی‌شان و تحت تأثیر آموزش هندسه، بیشتر از درک استدلالی استفاده کرده بودند، با درک عملیاتی به‌عنوان یک مسیر قابل‌اطمینان برای اثبات، به‌اندازه کافی آشنا نبودند. بنابراین علاوه بر دوباره شکل‌بندی شکل داده‌شده، با بکارگیری درک استدلالی طبیعی به محاسبه مساحت، نیز پرداختند. لازم به ذکر است این اتفاق در پایه نهم به ندرت رخ داده بود و دانش‌آموزان این پایه به نسبت دانش‌آموزان در پایه های دهم و یازدهم، اعتماد بیشتری به استفاده از نقش رهیافتی شکل هندسی داشتند و از رویکرد دیگری برای پاسخ‌گویی استفاده نکردند.

بیشتر دانش‌آموزانی که در تکلیف۱ به دنبال اطلاعات دقیق در بیان مسئله بودند و به داده‌های شکلی برای پاسخ‌گویی به تکلیف، اکتفا نکرده بودند، در تکلیف ۲ باوجود طبیعت شئ مانند شکل، مشاهده گردید در مسیر استدلال طبیعی، اطلاعات مورد نیاز را از شکل استخراج نموده و به تکلیف پاسخ دادند. اگرچه هیچ‌کدام از دانش‌آموزان پایه نهم نیازمند اطلاعات بیشتر، برای دوباره شکل‌بندی شکل داده‌شده، نبودند، تعدادی از دانش‌آموزان پایه های دهم و یازدهم، با بیان اینکه در مورد تساوی کمان‌های موجود در شکل و یا میزان فرورفتگی و برآمدگی شکل سمت راست در تکلیف، اطمینان کافی ندارند، ادعا نمودند با شرط دانستن این مطالب، هر دو شکل داده‌شده مساحت‌های برابر خواهند داشت. این گونه پاسخ ها در پژوهش های قبلی نبود. از آنجایی که در تکلیف ۳، خواص ریاضی در مورد شکل داده شده، در صورت تکلیف بیان شده بود، برای پاسخ گویی، می بایست زیر چتر قضایا و تعاریف و همچنین خواص ریاضی اظهارشده در

بیان تکلیف، به انجام تکلیف پرداخت. با این حال یافته های این پژوهش هم جهت با تحقیقات قبلی Michael– Chrysanthou (2013), Karpuz & Atasoy (2019); Karpuz & Güven (2022) نشان داد با وجود اینکه بیشتر مثال ها و فعالیت های هندسی در کتاب درسی(پایه نهم) مربوط به درک استدلالی می باشد، نه تنها دانش آموزان در پایه نهم، بلکه دانش آموزان در پایه های دهم و یازدهم، نیز در بکارگیری این درک برای انجام تکلیف هندسه، آنگونه که انتظار میرفت عمل نکردند. همچنین مشاهده گردید که دانش آموز با الهام از اینکه اشکال هندسی منبعی قابل اعتماد برای استنتاج حقایق هندسی است، پس از اصلاح ابعاد شکل هندسی رسم شده مبتنی بر اطلاعات داده شده در صورت مساله، به پشتوانه درک دریافتی خویش به تکلیف پاسخ داده است.

این یافته در راستای مطالعه Mesquita (1998) بود که در آن تعدادی از دانش‌آموزان بی‌درنگ با رسم دوباره شکل داده‌شده اما با طبیعت شیء، موفق به حل مسئله شدند. در برخی مواقع دانش آموزان هم جهت با مطالعه Michael–Chrysanthou & Gagatsis (2015)، فورا شروع به رسم شکل هایی با طبیعت شیء نموده و سپس فرایند پاسخگویی را با استنتاج اطلاعات مورد نیاز خود از شکل جدید، کامل می نمودند. سرانجام در این مطالعه متفاوت با پژوهش های قبلی، با دنبال نمودن مسیرهای استدلالی که دانش آموزان حین انجام تکلیف۳ انتخاب می کردند مشاهده گردید هرگاه دانش آموزان درمیانه راه برای برقراری همنهشتی بین مثلث های مورد نظر، فرض های مورد نیاز خود را نمی یافتند، تساوی پاره خط ها و یا زوایای لازم برای ایجاد هم نهشتی را بدون استدلال و یا با استدلال نادرست می پذیرفتند. از آنجایی که تکالیف هندسی مربوط به درک ساختاری، تکلیف ۴، در کتاب درسی پایه نهم به ندرت مشاهده گردید، و تعداد دانش آموزان پایه نهم از دیگر پایه ها بیشتر بود، لذا پاسخ های صحیح دانش آموزان به این تکلیف نسبت به تکلیف۲ و ۳، کمتر بود. با این حال با توجه به ماهیت تکلیف، تنوع بکارگیری درک های مختلف برای پاسخ گویی به آن قابل توجه بود. دانش آموزان در پایه نهم در این تکلیف نسبت به دانش آموزان درپایه های بالاتر شجاعانه با انتخاب مسیرهای متنوع در پاسخ گویی از فرایند استدلال طبیعی بهمراه تعبیر عملیاتی، و بدنبال آن نقش رهیافتی شکل هندسی بهره بیشتری بردند(شکل ۱۶).

علاوه بر آن مطالعه، نشان داد دانش آموزان پایه نهم که به تازگی در فصل سوم کتاب درسی با استدلال هندسی آشنا گشته بودند از طریق بازنمایی های متنوع توانستند از نقش های متفاوت توصیفی شکل بهره مند شوند. آنان از مسیرهای درک استدلالی ذکر شده در یافته ها برای شروع حل تکلیف به میزان یکسان بهره گرفتند. در حالی که تعداد زیادی از دانش آموزان در پایه های بالاتر مسیر ۱ را برای استدلال انتخاب نمودند. برای مثال در شکل ۱۶می توان سعی و تلاش دانش آموز پایه یازدهم را برای نوشتن یک استدلال قوی از طریق نوشتن روابط ریاضی و محاسبه مساحت مشاهده نمود بگونه ای که مورد قبول معلم خویش قرار گیرد! یافته های پژوهش در تکلیف۴ نشان داد، دانش آموزان درپایه های پایین تربا اینکه درمرحله مقدماتی آشنایی با استدلال هندسی قرار داشتند، نسبت به دانش آموزان در پایه های بالاتر از وجود مسیرهای متنوع جهت پاسخگویی بهره بیشتری برده و در بیان دلایل خود، آزادی عمل و اختیار بیشتری داشتند. این مطلب را می توان از جدول شماره ۱۰، استفاده از درک دریافتی بهمراه تعبیر عملیاتی، مشاهده

نمود. از نتایج این مطالعه هم جهت با تحقیق Michael– Chrysanthou (2013)، آشکار می‌شود که تدریس هندسه می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا از مسیر درک طبیعی نگاه کردن به شکل هندسی به مسیر درک استدلالی ارتقا یابند. معلمان اغلب در برابر مداخله در کار دانش‌آموزان مقاومت می‌کنند. با این حال، به باور Cannizzaro, L., & Menghini, M. (2006) ، کمک به دانش‌آموزان برای پیشرفت از درک دریافتی به درک استدلالی اشکال هندسی، برای حل مسئله بسیار حیاتی است. Gagatsis et al. (2023) تأکید می نماید درک صحیح مسائل به تنهایی نمی‌تواند معلمان را قادر سازد تا مشکلات دانش‌آموزان را پیش‌بینی کنند.

گنجاندن تکالیف هندسی متناسب در برنامه درسی، رویکردی هدفمند است که به درک‌ها و چالش‌های مختلف دانش‌آموزان در مواجهه با مفاهیم هندسی در طول سال‌های تحصیلی توجه دارد(Michael–Chrysanthou, et al. 2024). با این حال تحقیقات بیشتری لازم است تا به این سوال پاسخ داده شود: دانش آموزان چگونه یاد میگیرند تا به شکل هندسی نه فقط از مسیر درک دریافتی بلکه از مسیر درک ریاضیاتی، خودشان بطور مستقل نگاه کنند بگونه ای که بتوانند مساله را حل کنند؟ Duval (2014)، در ادامه تاکید می کند معلمان لازم است برای بررسی تکالیف دانش آموزان متغیرهای شناختی و ریاضی را با هم در نظر بگیرند و شناخت و آگاهی از این متغیرها برای یک تدریس مؤثر، ضروری است. بنابراین، آشنایی معلمان از وجود درک‌های مختلف شناختی دانش‌آموزان حین نگاه کردن به شکل هندسی، از اهمیت بالایی برخوردار است.(Gal, 2019) برگزاری دوره‌های تخصصی هندسه به معلمان کمک می‌نماید تا با انواع بازنمایی‌های ذهنی دانش‌آموزان درمواجه با شکل، حین انجام فعالیت هندسی، آشنا شوند و دراین مسیر به آنان کمک نمایند تا بین مسیردرک طبیعی و درک ریاضیاتی نگاه کردن به شکل هندسی پیوند برقرار نمایند. محدودیت‌هایی در انجام این تحقیق وجود داشت که محققان هنگام پژوهش از آن‌ها آگاه بودند. فعالیت‌های بررسی‌شده در این مطالعه، برگرفته از یک آزمون گسترده‌تر بود، بنابراین، به دلیل طولانی بودن فرآیند برگزاری آزمون تشریحی، تأثیر عواملی نظیر خستگی را نمی‌توان در روند پاسخ‌گویی دانش‌آموزان به تکلیف‌ها، بی‌اثر دانست. از سوی دیگر نمونه ها برای برگزاری آزمون با توجه به محدودیت زمان و تأکید محقق بر حضور داشتن حین اجرای پژوهش، به روش در دسترس انتخاب شدند. لذا تعمیم نتایج آن با محدودیت مواجه است.

حامی مالی

این تحقیق هیچ گونه کمک مالی از ســـازمان های تأمین مالی در بخش های عمومی، تجاری یا غیر انتفاعی دریافت نکرده است.

تعارض منافع

طبق اظهارات نویسندگان، این مقاله هیچ گونه تعارض منافعی نداشته است. همچنین، این مقاله پیش از این در هیچ یک از نشریات داخلی یا خارجی منتشر نشده و تنها برای ارزیابی و امکان چاپ، به مجلهٔ تدریس پژوهی ارسال گردیده است.

Refrences

Antunović-Piton, B., & Baranović, N. (2023). Discovering some difficulties of pre-service primary teachers in a problemsolving process by use of geometric figures. *PROBLEM SOLVING & PROBLEM POSING: PERSPECTIVES AND POTENTIALITIES IN RESEARCH AND PRACTICE*, 37.

apprehension: cognitive structure and levels of geometrical ability. *Educ Stud Math* (2024).

Cannizzaro, L., & Menghini, M. (2006). From geometrical figures to definitional rigour: teachers' analysis of teaching units mediated through van Hiele's theory. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *6*(4), 369-386.Creswell, J. W. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches* (4th Ed.). Thousand Oaks, CA: Sage

De Villiers, M. (2010). Some Reflections on the Van Hiele Theory, Invited plenary from the 4th Congress of mathematics teachers, Zagreb.

di scuola secondaria: la loro capacità di costruire dimostrazioni geometriche e di prevedere le difficoltà degli studenti. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula*, (14), 59 - 84. https://doi.org/10.33683/ddm.23.14.3

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1990, July). On difficulties with diagrams: Theoretical issues. In *Proceedings of the 14th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 27-36).

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In R. Sutherland and J. Mason (Eds.) *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education: NATO ASI Series* (Vol. 138, pp. 142-157). Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21^< st> century*. Kluwer Academic Publishers

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. In In F. Hitt and M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 3-27). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (2011). Why figures cannot help students to see and understand geometry? Analysis of the role and the cognitive functioning of visualization. In *Symposium Mathematics Education Research at the University of Cyprus and Tel Aviv University* (pp. 22-23).

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of quadrilaterals' definitions and hierarchical classification: Towards a theoretical framing. Research in Mathematics Education, 9(1), 3–20.

Gagatsis, A., Geitona, Z., Panaoura, R., & Elia, I. (2023). La comprensione delle figure geometriche da parte degli insegnanti

Gal, H. (2019). When the use of cognitive conflict is ineffective-problematic learning situations in geometry. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(2), 239-256.

Gogou, V., Gagatsis, A., Gridos, P., Elia, I., & Deliyianni, E. (2020). The double nature of the geometrical figure: Insights from empirical data. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 17, 7-23.

Gridos, P., Avgerinos, E., Mamona-Downs, J., & Vlachou, R. (2021). Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-18.
https://doi.org/10.1007/s10649-024-10317-5

Jones, K. (2000). Critical issues in the design of the school geometry curriculum.

Karpuz, Y., & Atasoy, E. (2019). Investigation of 9th Grade Students' Geometrical Figure Apprehension. *European Journal of Educational Research*, *8*(1), 285-300.

Karpuz, Y., & Güven, B. (2022). Are 9th Grade Students Ready to Engage in the Theoretical Discursive Process in Geometry? *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*, *11*(1), 86-112.

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, and O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 159–179). Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_11

Mariotti M. A. (1995). Images and Concepts in Geometrical Reasoning. In R. Sutherland and J. Mason (Eds.) *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education: NATO ASI Series* (Vol. 138, pp. 97-116). Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_7.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 183-195.

Michael– Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2013). Geometrical figures in geometrical task solving: an obstacle or a heuristic tool. *Acta Didactica Universitatis Comenianae– Mathematics*, *13*, 17-30.

Michael, P. M. (2013). Geometrical figure apprehension: cognitive processes and structure.

Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2014). Ambiguity in the way of looking at geometrical figures. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4), 165-179.

Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2015). The influence of the nature of geometrical figures on geometric proofs and the role of geometrical figure apprehension. *VIII Colloque International VIII International Conference A.S.I. Analyse Statistique Implicative Statistical Implicative Analysis Radès (Tunisie).* http://sites.univ-lyon2.fr/ASI8

Michael–Chrysanthou, P., Panaoura, A., Gagatsis, A. *et al.* Exploring secondary school students' geometrical figure

Selling, S. K. (2015). Learning to represent, representing to learn. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*(2016) 191-209.

Zangeneh, Bijan Z. (2005). Geometry of Line and Plane in school Mathematics. (In farsi) Roshd Mathematics Teacher Education Journal Organization for Research and Curriculum Planning, Ministry of Education, no. 80, pp. 4-11